

Stile

Prof. 11 10 luglio 1872

ELEMENTI
DI
MECCANICA MODERNA

AD USO
DELLE SCUOLE PROFESSIONALI E DEGLI ISTITUTI TECNICI
DEGLI INDUSTRIALI, MECCANICI CAPI-MASTRI, ECC., ECC.

DELL'INGEGNERE
EMILIO OLIVIERI

PROF. DI MECCANICA E TECNOLOGIA NELLA SCUOLA PROFESSIONALE

DI BIELLA

TESTO

BIELLA
TIPOGRAFIA, LITOGRAFIA E LIBRERIA G. AMOSSO
1872

Prezzo dell'opera compreso il Fascicolo delle Tavole L. 5.



ELEMENTI DI MECCANICA MODERNA

AD USO

DELLE SCUOLE PROFESSIONALI E DEGLI ISTITUTI TECNICI,

DEGLI INDUSTRIALI, MECCANICI, CAPI-MASTRI, ECC., ECC.

DELL'INGEGNERE

EMILIO OLIVIERI

PROP. DI MECCANICA E TECNOLOGIA NELLA SCUOLA PROFESSIONALE

DI BIELLA.



.... Nell'attrito delle macchine e
nel rapido scambio delle idee fra po-
polo e popolo v'ha tal macchina poesia
da v'ereditarne tutti i melensi e arrendici
cantori dei ruscillett e delle ninte

P. MANTOVANI

BIELLA,

GIUSEPPE AMOSSO, TIPOGRAFO-EDITORE

1872.

PROPRIETÀ LETTERARIA

AL LETTORE.

Il bisogno sempre più imperioso per noi di estendere alle classi industriali ed operaje quelle cognizioni generali della meccanica, che sono indispensabili per comprendere bene il modo con cui funziona una macchina come le condizioni di stabilità di un edificio, rende indispensabile che si studii di riassumere i principj fondamentali di quella scienza e di ridurli alla più semplice loro espressione, onde cost, spoglia delle sue pompose scientifiche vesti, la meccanica si presenti accessibile ed utile anche a chi non può consumare lunghi anni fra studj ardui e costosi. Tale è il compito che, per la parte meccanica, si devono proporre le Scuole professionali, che ora Governo e Corpi morali fanno a gara ad istituire. Ma, per agevolare il compito di quelle scuole, per aiutarne gli allievi anche dopo che essi abbiano finito il breve corso dei loro studj, per servire infine di guida e di istruzione a coloro a cui torna impossibile il frequentar regolarmente una scuola, è necessario che esistano libri capaci di rispondere a queste mo-

derne esigenze, e in cui anche l'operajo possa leggere ed intendere, nè vi trovi sol concetti ipotetici od astratti, ma verità che hanno tosto in pratica riscontro. Ecco dunque il motivo per cui io mi provai a scrivere queste poche pagine riassumendovi le lezioni ch'io faccio già da più d'un anno nella Scuola professionale di Biella. Che questo piccolo libro possa soddisfare completamente al bisogno, ch'io già accennava, sono ben lontano dal crederlo: ciò ch'io spero è che esso non sia riuscito una rifrittura od una riduzione in piccolo di un trattato qualunque. Persuaso che, per raggiungere uno scopo nuovo, occorreva percorrere una via nuova, io misi da canto ogni altro libro, almeno finchè si trattò di esporre i principj teorici. Per quanto riguarda poi le applicazioni od il modo di risolvere i problemi meccanici, io cercai di valermi di quanto trovai di più opportuno fra le moderne teorie.

Ecco, o lettore, le mie ragioni. Se il giudizio dei dotti condannerà questo mio lavoro all'oblio, io avrò pur sempre la convinzione d'aver fatto coscienziosamente un tentativo per essere utile al paese.

L'AUTORE.

INTRODUZIONE.

La meccanica si può definire *la scienza che studia i movimenti e le loro cause*; incominciamo adunque dal vedere che cosa si intenda per movimento.

Quando noi vogliamo concepire l'idea di un corpo qualunque, troviamo che all'idea del corpo si associa compagna indivisibile l'idea dello spazio da lui occupato, talchè noi non sappiamo figurarci il corpo se non in un certo punto di questo immenso incognito, che chiamiamo *spazio*. Oltre poi all'idea dello spazio ve n'ha un'altra che non è meno indivisibile da ogni nostro concepimento, ed è quella del tempo. Ogni idea che nasce nella nostra mente, ogni sensazione che proviamo incomincia e si sviluppa in certi istanti di quell'altro immenso-incognito che chiamiamo *tempo*. Ora, se noi troviamo che la posizione di un corpo nello spazio va cambiando nei successivi istanti in cui consideriamo il corpo stesso, noi diciamo che il corpo è *in moto*. Il *movimento* si potrebbe dunque definire *il successivo cambiar di posizione nello spazio*. — Ma, come facciamo noi ad accorgerci di questo cambiamento di posizione? — Quando noi osserviamo la carrozza che sta davanti alla porta della nostra casa, immediatamente giudichiamo che essa è ferma ed immediatamente pure ce n'accorgiamo quando essa si mette in moto. Ora, questo giudizio così pronto che noi facciamo non è che il risultato del confronto fra la posizione della carrozza,

quale ci viene presentata alla mente in diversi successivi istanti, e le analoghe posizioni dei muri, p. es., della casa, del pavimento della strada e così via. Siccome noi supponiamo questi ultimi corpi come immobili, così noi giudichiamo ferma la carrozza quando essa si trova sempre di contro allo stesso punto della casa, e la giudichiamo in moto quando essa passa successivamente davanti a punti differenti della stessa. Per accorgerci dunque del movimento noi abbiamo bisogno di poter fare questo confronto. Ecco il perchè noi non sapremmo dire con pari facilità se le stelle si muovono o se sono immobili, ed ecco perchè gli indici dell'orologio non ci pajon quasi muoversi. Nel primo caso ci manca un corpo fisso tale da potervi facilmente riferire la posizione delle stelle in diversi istanti; nel secondo caso gli spostamenti sono così piccoli che occorre un certo tempo per poterne apprezzare uno. — Oltre al movimento *proprio* un corpo può avere anche uno o più moti *comuni* con un altro corpo, col quale trovasi congiunto. Così l'acqua, la quale ha un moto proprio fra le ali di una ruota idraulica, possiede anche il moto comune con questa. Le persone che trovansi a bordo di un bastimento o in una carrozza hanno in comune col bastimento o colla carrozza il movimento dei medesimi. Chi discende da una carrozza mentre questa è in moto deve ricordare questo fatto, per il quale il movimento posseduto in comune colla carrozza, non potendosi estinguere immediatamente in tutte le parti del corpo, può cagionare una caduta. — Dovendo poi, per constatare il movimento di un corpo, riferire le sue successive posizioni a quella di un altro corpo, può avvenire che quest'altro corpo si muova esso pure. Ciò anzi a rigore avviene sempre, poichè di corpi assolutamente immobili non ne esiste e non ne può esistere; ma come noi ci dobbiamo occupare di corpi che sono sulla terra, così riteniamo per

fermi quei corpi, i quali non hanno che i moti comuni coll'intero globo terrestre. Molte volte però accade che noi riferiamo le successive posizioni di un corpo a quelle di un altro corpo che pure ha un moto anche indipendentemente da quelli della terra. Così per es. ciò si può verificare per l'acqua che si muove fra le ali della ruota idraulica; così pure pel battello che si muove sull'acqua corrente di un fiume. Il moto dell'acqua riferito a quello delle ali della ruota, come il moto del battello riferito all'acqua sono evidentemente diversi dai movimenti che ci risulterebbero se noi riferissimo le successive posizioni dell'acqua alle sponde invece del canale, o le successive posizioni del battello alle sponde del fiume. Il movimento desunto a quest'ultimo modo (che è l'ordinario) si chiama *assoluto*, mentre il moto desunto nel primo modo si chiama *relativo*.

Il movimento esiste dovunque noi rivolgiamo lo sguardo. Dai moti delle enormi masse celesti, che percorrono migliaia di chilometri al minuto secondo, fino a quello del più piccolo animaletto che il microscopio ci possa mostrare entro una goccia d'acqua, noi troviamo una serie indefinita di movimenti che non ha limite nè superiore, nè inferiore se non per l'imperfezione dei nostri mezzi. Parlando poi dei piccoli movimenti, la scienza moderna ci va scoprendo un mondo pressochè nuovo ai nostri padri nella serie complicatissima ed indefinita dei moti atomici. Benchè non sia nostro compito l'occuparci di un simile argomento, nondimeno, per la continua relazione che questi moti atomici hanno collo stato e coi movimenti comuni dei corpi, è utile che ne diamo un'idea.

Noi tutti intendiamo che cosa si voglia dire per un corpo; ma non tutti forse avremo pensato quale possa essere l'interna struttura di quel corpo che la mente ci presenta come qualche cosa di unico. È un fatto però noto universalmente, che i corpi tutti

sono divisibili. Le esperienze ed i fenomeni che si adducono per dimostrare il grado di suddivisione a cui si possono spingere i corpi sono qualche volta sorprendenti. Così, per esempio, possiamo accennare le foglie d'oro di tal sottigliezza che ne occorrono 25,000 sovrapposte per formare la grossezza di 1 centimetro; il filo d'argento dorato in cui lo spessore dello strato d'oro che lo ricopre non è che $\frac{1}{25000}$ di millimetro: eppure quello strato d'oro è tale che, sciolto l'argento interno nell'acido nitrico, rimane non interrotto sotto forma di un tubo. La piccolezza degli animali infusorj, che riesciamo appena a scoprire coi più potenti microscopj, è pur sorprendente in confronto alle grandezze che noi siamo soliti ad apprezzare; ma ancora più meraviglioso è il pensare che ciascuno di quegli animalletti rappresenta un insieme di organi, che si rinnovano continuamente esercitando ciascuna le proprie funzioni! Un'esperienza finalmente altrettanto semplice quanto persuasiva è quella che si suol fare ponendo un centigrammo di carmino entro un vaso che contenga più litri di acqua. Il carmino va ben presto a colorare tutta la massa d'acqua, talchè in ogni millimetro cubo di quell'acqua possiamo ritenere che esistano moltissime particelle di carmino. Eppure un millimetro cubo di quell'acqua non sarebbe che $\frac{1}{25000000}$ o $\frac{1}{2500000}$ del volume totale!

Ad onta di tutto ciò, quando noi abbiamo diviso e suddiviso un corpo finchè i mezzi che avevamo a disposizione ce l'hanno permesso, non v'è certo alcuna ragione che ci autorizzi a supporre che ogni particella di quel corpo non possa essere di nuovo suddivisa. Ma qui potremmo farci una domanda: Continuando a suddividere un corpo, le parti diventano sempre più piccole: ora, se noi supponiamo i corpi divisibili all'infinito che cosa avverrà in ultimo delle loro particelle? Ecco la nostra x sulla quale noi getteremo un prudente velo. Però, senza addentrarci

nelle tenebre dell'indeterminato, noi possiamo arrestarci a qualche cosa di concreto ricavando dai nostri studj utilissime conseguenze. In fatti, uno dei fenomeni più generali con cui si manifestano i corpi è il loro peso dovuto alla reciproca attrazione della materia. Una particella, per quanto piccola, di un corpo ha un peso, il quale, se non sarà misurabile individualmente colle più squisite nostre bilancie, potrà però essere apprezzato, o coll'accumulare molte di quelle particelle, o con altri mezzi che la scienza sa trovare. A questo però v'ha un limite: poichè, suddividendo sempre più il corpo, noi possiamo colla immaginazione, se non col fatto, arrivare ad una particella, oltre la quale l'azione del peso, nè alcuna delle sue conseguenze, non può in alcun modo essere constatata. Or bene, questa particella noi la chiameremo *atomo*, parola che vorrebbe dire *indivisibile*, ma che per noi non esprimerà se non che *la particella più piccola di un corpo capace di manifestarsi mediante il suo peso o mediante altro fenomeno equivalente*.

Intesi una volta sul significato della parola *atomo*, noi potremmo ancora domandare: Questi atomi si trovano essi in un corpo gli uni a contatto cogli altri come la nostra grossolana immaginazione ci farebbe supporre? Ora, la scienza ha risposto già da un pezzo che gli atomi dei corpi sono separati e distanti gli uni dagli altri di intervalli, che dipendono dalle reciproche azioni de' medesimi, talchè essi, sotto l'impero di azioni esterne od interne, possono allontanarsi od avvicinarsi, alterando così il volume esterno del corpo nonchè la sua forma. Egli è quello che vediamo ogni giorno mediante il riscaldamento, il raffreddamento, la compressione, ecc. V'è poi da aggiungere a tutto ciò un altro fatto, ed è che gli atomi sono continuamente in moto e che questi loro movimenti, come avviene pei pianeti in cielo, sono almeno una delle principali azioni da cui di-

pende la loro reciproca posizione. Ogni mutamento dunque in questi movimenti tende a produrre una alterazione corrispondente nella reciproca collocazione degli atomi. Il calore, la luce, l'elettricità non sono altro che i fenomeni, coi quali ordinariamente si manifestano queste alterazioni nei movimenti atomici, fenomeni che, dipendendo da una stessa causa, possono facilmente sostituirsi gli uni agli altri, come infatti avviene. La costituzione e le proprietà chimiche infine dei corpi non sarebbero che conseguenze della reciproca collocazione di questi atomi e dei loro movimenti. Le leggi generali della meccanica dunque potrebbero applicarsi a spiegare le combinazioni varie dei corpi e le loro affinità.

Noi però ci arresteremo qui, non credendo opportuno di dilungarci troppo in un argomento che è fuori del nostro campo. Riassumendo in breve quanto abbiamo accennato, noi diremo adunque che un corpo deve considerarsi come un sistema di punti materiali distanti fra loro e dotati di movimenti particolari, dai quali dipende la reciproca loro collocazione; che questi punti od atomi costituiscono così dei gruppi ai quali si dà ordinariamente il nome di molecole (piccole moli); queste molecole poi raggruppate costituiscono altre molecole composte, e così di seguito. Anche le molecole semplici o composte hanno dei movimenti loro particolari, benchè sempre e necessariamente collegati con quelli delle molecole dell'ordine inferiore o degli atomi. Finalmente osserveremo che, quando un movimento comunicato ad un corpo non può conservarsi integro nel corpo stesso, talchè in tutto o in parte esso venga ad estinguersi, quel movimento o quella parte di movimento apparentemente estinta si comunica alle particelle componenti il corpo o i corpi a contatto, e di là va suddividendosi e diffondendosi sempre più, portando corrispondenti alterazioni nei moti molecolari ed ato-

mici. Così avviene quando col martello noi percuotiamo un corpo. Il movimento acquistato dal martello va improvvisamente ad estinguersi; ma ne nasce dapprima un tremito molte volte sensibilissimo nelle parti del martello, del corpo percosso, del suo sostegno. Il primo fenomeno prodotto da questi movimenti interni è il suono, il rumore cioè della percossa; il secondo, che nasce dall'alterazione consecutiva dei moti atomici, è il calore, fenomeno che si può rendere pure sensibile replicando quanto occorre i colpi. Questi fenomeni poi non hanno luogo solamente quando si estingue istantaneamente tutto il movimento del corpo, come nel caso del martello. La parte, per. es., di movimento, che lo sfregamento del mozzo della ruota sul suo perno tende ad estinguere nella ruota, si converte del pari in moti delle particelle di ogni ordine tanto della ruota che del perno, dando origine ad un suono e ad uno sviluppo di calore a tutti noto.

In conclusione, tutte le volte che una parte qualunque del movimento di un corpo viene ad estinguersi, essa dà luogo ad una corrispondente alterazione nei moti interni delle particelle del corpo o dei corpi a contatto, originando una produzione di calore. Il calore dunque può considerarsi come il rappresentante dei moti atomici dei corpi; e quindi noi possiamo più brevemente dire che *il moto estinto nella massa si converte in calore.*

Quel poco che abbiamo ora esposto basti per dimostrare che il movimento non devesi considerare come una semplice accidentalità in un corpo, ma piuttosto come una condizione essenziale alla sua esistenza. L'idea del movimento è la prima che si presenta alla nostra mente: l'idea dello spazio, quella del tempo, quella della stessa nostra esistenza non ne sono in origine che conseguenze. Noi sentiamo di esistere perchè ci

moviamo, perchè sentiamo il movimento incessante dentro di noi e fuori di noi. Il movimento è il simbolo del lavoro e il lavoro è la vita dell'universo!

Passiamo ora a dire qualche parola sulle cause dei varj movimenti.

In generale, in meccanica, tutto ciò che può produrre o modificare il movimento in un corpo si chiama *forza*: di tali forze se n'era immaginato un gran numero, assegnandone una speciale ogni volta che si presentavano fenomeni differenti. La scienza moderna però ci dimostra che tutte queste forze speciali che, atteso il loro modo di manifestarsi, potremo ancora ritenere distinte, hanno origine da una causa comune, il calore. Così la locomotiva e la macchina a vapore in genere traggono la loro forza dal calore prodotto dal combustibile, che si abbrucia nel focolajo. Lo stesso è delle altre motrici somiglianti, dette appunto caloriche (macchine ad aria calda, a gaz, ecc.). L'uomo stesso e gli animali ritraggono la loro forza muscolare dal calore sviluppato colla respirazione e colla conseguente combustione di una parte degli alimenti. Finalmente le stesse ruote idrauliche, le quali ricevono apparentemente la loro forza dall'acqua, non fanno menomamente eccezione agli altri motori nominati. Ed in fatti l'acqua non è che un intermediario qualunque atto a trasmettere alla ruota l'azione sviluppata dalla gravità o attrazione terrestre; ma questa azione non si potrebbe sviluppare se l'acqua non discendesse, e perchè l'acqua possa discendere bisogna che sia stata prima portata in alto: ora ecco qui l'azione del calore; poichè l'acqua non può essere portata in alto che mediante la evaporazione, oppure mediante un altro motore, con che ricadremmo all'origine della quistione. Senza dilungarci adunque più oltre, noi possiamo conchiudere che quello stesso calore, che abbiamo visto

aver origine da un movimento estinto al di fuori, può alla sua volta divenire la causa di un nuovo movimento esterno, il quale poi finirebbe col riprodurre il calore, dal quale ha avuto origine, chiudendo così il ciclo che perpetua l'attuazione dei fenomeni dell'universo. Dopo ciò una *forza motrice* si potrebbe definire una *causa capace di convertire il calore in movimento esterno*, e noi riterremo come principio fondamentale della meccanica moderna che: *ogni lavoro meccanico prodotto corrisponde ad un consumo corrispondente di calore, e viceversa che ogni scomparsa di lavoro meccanico corrisponde ad una produzione equivalente di calore.*

Noi non andremo più in là di queste poche nozioni, che io ho creduto utile di dare ancorchè rapidamente, sia perchè in esse troveremo qualche utilità per la più chiara intelligenza di molti fenomeni della meccanica, sia perchè, destinando io questi elementi specialmente per coloro, che forse non avranno opportunità di addentrarsi molto in simili studj, ho creduto prezzo dell'opera lo spendere poche parole per elevare alquanto le idee che comunemente si hanno sui corpi e sui fenomeni che ne dipendono.

Ora, prima di metterci definitivamente nel cammino che ci siamo prefisso, dirò una parola sul metodo del quale ci serviremo per sviluppare le diverse teorie.

Scrivendo io, come ho già detto, queste pagine per coloro i quali o nelle scuole professionali, o altrimenti, intraprendono lo studio della meccanica per farne tosto applicazione alla pratica, e d'altra parte vi si accingono senza molti studj preparatorj, mi prefiggo un duplice scopo, quello cioè di presentare nel modo più semplice possibile i principj più generali della scienza, mostrandone, appena che si presenti l'occasione, l'applicazione pratica; ed inoltre quello di educare la mente dello

studioso abituandola al riflettere, all'analizzare, al cercare la ragione di tutto. È con ciò che verrà bandita la cieca pratica, unica guida dell'ignorante, e che non consiste in altro fuorchè nella materiale riproduzione di ciò che già si fece, conservandone con pari scrupolo gli errori e le imperfezioni. Una volta abituata la mente all'analisi, dovunque noi troveremo il libro in cui studiare. L'acqua sgorgante da un tubo, il movimento di una ruota o del più comune meccanismo potranno fornire argomento a riflessioni, che, colla guida dei principj generali che io cercherò di esporre, non saranno mai infeconde di utili conseguenze. Per ottenere gli scopi accennati io ho creduto di prescindere alquanto dalla rigorosa sistematica esposizione delle teorie. Senza stancarci dapprincipio con un cumulo di definizioni e di teoremi, noi incominceremo senz'altro il nostro studio esaminando praticamente una macchina qualunque ed analizzandone i movimenti: le teorie e le definizioni verranno poi come conseguenza. Inoltre noi ci serviremo, per la soluzione della maggior parte delle questioni, dei metodi grafici, i quali, oltre al permettere maggiore speditezza in molti casi, hanno il vantaggio di presentarsi assai più facili e più chiari, specialmente per coloro che non hanno molta abitudine coi numeri e coll'algebra. D'altra parte gli studiosi, esercitandosi nella risoluzione grafica delle questioni meccaniche, troveranno un'altra utilità indiretta, quella di abituarsi a disegnare con precisione.

CAPITOLO PRIMO.

LA MACCHINA D'ATWOOD. PRIMI FATTI; PRIME CONSEGUENZE.

Si conosce sotto il nome di Macchina d'Atwood un apparecchio destinato a dimostrare le leggi del moto discendente di un grave. Questo apparecchio (fig. 1.^a) consta essenzialmente di un piede o supporto, sull'alto del quale sta una ruota a gola o puleggia mobilissima, sulla quale si accavalla una funicella, ai cui capi, pendenti da una parte e dall'altra, stanno attaccati due pesi eguali; dimodochè, salendo l'uno, l'altro scende, e viceversa. Oltre a ciò vi è un meccanismo d'orologeria destinato a battere i secondi, nonchè altri congegni, dei quali per ora non abbiamo bisogno di occuparci.

Ciò posto, supponiamo di aver dinnanzi una tal macchina come l'abbiamo accennata. Prima di tutto è facile capire che, i due pesi essendo eguali, come si è detto, ed essendo simmetricamente posti rispetto alla verticale che passa per l'asse della puleggia, essi rimarranno fermi al loro posto; poichè ciascuno dei due pesi tenderebbe a scendere in virtù della gravità, mentre verrebbe contemporaneamente spinto a salire con egual forza e di un eguale spazio dall'altro peso. Ma se noi aggiungessimo ad uno di quei pesi un pesetto addizionale, allora le azioni da una parte e dall'altra non sarebbero più bilanciate, e quindi il

peso stato anmentato dal pesetto addizionale dovrebbe discendere sollevando l'altro. Questo appunto è ciò che avverrà in generale, ma non sempre. In fatti, benchè la puleggia sia resa mobilissima con un sistema particolare d'appoggio che descriveremo più tardi, benchè la funicella sia pieghevoleissima, nondimeno lo sfregamento dei perni, la rigidità della fune, la resistenza dell'aria costituiranno altrettante resistenze, che l'azione di quel pesetto addizionale dovrà vincere prima di mettere in moto l'apparecchio. Quel pesetto potrebbe dunque essere inferiore a quanto occorre per superare queste resistenze, oppure essere appena pari alle medesime, ed allora il movimento non avrebbe luogo. Perchè quindi l'apparecchio si metta in moto è necessario che il pesetto addizionale sia maggiore di quanto occorre per controbilanciare semplicemente le resistenze, che la macchina incontrerebbe muovendosi. Per fissar meglio le idee supponiamo che i due pesi della macchina siano di 2 ettoqr. l'uno, e che il peso addizionale necessario per controbilanciare semplicemente le resistenze sia di un grammo: dimodochè, mettendo da una parte, oltre ai 2 ettoqr., fino ad 1 gr. di peso addizionale, la macchina si manterrebbe ferma, incominciando a muoversi quando il peso addizionale supera il grammo.

Vediamo ora che cosa avverrà durante il movimento.

Prima di tutto il moto dell'apparecchio andrà sempre crescendo: l'esperienza lo prova chiaramente, ed anche la ragione lo dimostra. Infatti, supponiamo che il peso addizionale sia di 5 grammi; 1 grammo del medesimo sarà, come abbiamo detto, impiegato a compensare l'azione assorbita dalle resistenze; restano quindi 4 grammi, la cui azione verrà comunicata alla massa dei due pesi. Ora quest'azione comunicherà in un dato istante un certo movimento ai due pesi, ma nell'istante immediatamente successivo l'azione motrice continua ancora come prima, ed allora in quel secondo istante i due pesi riceveranno un nuovo movimento in aggiunta a quello che già avevano; dal

che consegue che il movimento dei due pesi nel secondo istante sarà maggiore che nel primo e così di seguito. Anzi, essendo l'azione motrice costante, se gli istanti che si considerano fossero di eguale durata, gli aumenti che si osserverebbero nel movimento dei pesi per ogni istante sarebbero eguali.

Noi avremo dunque nei pesi un movimento che si chiama *uniformemente accelerato*, poichè il movimento o meglio la *velocità* va aumentando uniformemente, ossia di quantità eguali per istanti eguali.

Ma quest'aumento di velocità sarebb'egli lo stesso se noi avessimo a cangiare il peso addizionale, ponendolo, per es., di 4 grammi invece che di 5? È evidente che diminuendo il peso addizionale si verrebbe a diminuire la quantità di azione motrice ricevuta dal sistema in un dato istante. Dunque anche l'aumento di velocità prodotto sarà minore di prima. Viceversa invece sarebbe stato maggiore se il peso addizionale si fosse aumentato.

Ora un'altra osservazione. Se, lasciando il peso addizionale di 5 grammi, si fossero ridotti i pesi normali ad un ettogrammo l'uno invece che due, come sarebbe avvenuto il movimento? — Quanto alla natura del movimento non v'è dubbio che sarebbe stata la stessa, ma l'aumento di velocità per un dato istante sarebbe stato quasi doppio che prima. Infatti prima abbiamo detto che v'era un'azione motrice libera di 4 grammi, il che potremmo supporre che vi sia anche ora, ammettendo che le resistenze non siano cambiate; ma prima quell'azione motrice doveva essere distribuita sopra una massa totale corrispondente a circa Ch. $0,2 + 0,2 + 0,005$ (trascurando il peso delle funicelle, ecc.). Ora invece la stessa azione va ripartita sopra una massa corrispondente a Ch. $0,1 + 0,1 + 0,005$. Se la quantità di materia da mettersi in moto è minore, la stessa azione motrice potrà comunicare maggiori aumenti di velocità; e precisamente gli aumenti di velocità in uno stesso istante prima

ed ora staranno fra loro come i numeri 0,205 a 0,405. Perciò ho detto che il nuovo aumento di velocità sarà quasi doppio del primo. È chiaro poi che se i pesi normali si fossero invece aumentati, collo stesso peso addizionale l'aumento di velocità ottenuto sarebbe stato minore sempre nel rapporto inverso dei pesi totali in moto.

Riassumendo adunque quanto abbiamo potuto osservare in questo esame generale, possiamo concludere:

1.° Finchè da una parte e dall'altra della macchina d'Atwood si hanno due pesi eguali, la macchina non si muove (a meno che non venga messa in moto da qualche causa estranea).

2.° Perchè l'apparecchio si metta in moto è necessario che la causa motrice (peso addizionale) sia maggiore di quanto occorre per semplicemente bilanciare le resistenze che si manifesterebbero nel movimento.

3.° Quando ha luogo il movimento per una causa costante, com'è l'aggiunta del peso addizionale, il movimento è *uniformemente accelerato*, cioè la velocità dei pesi va crescendo continuamente di quantità eguali per tempi eguali.

4.° Quest'aumento costante di velocità è in *proporzione diretta del peso addizionale e in proporzione inversa del peso totale messo in movimento.*

CAPITOLO SECONDO.

VELOCITÀ. — ALTRE CONSIDERAZIONI E CONSEGUENZE CHE NE DERIVANO.

MOTO UNIFORMEMENTE RITARDATO E MOTO UNIFORME.

Nel Capitolo precedente abbiamo dovuto introdurre la parola *velocità* per caratterizzare il movimento dei pesi della macchina d'Atwood. Questa parola è adoperata pure nel linguaggio ordinario e ad un dipresso tutti sanno che cosa vuol dire; ma a noi occorre definirla in modo preciso. Quando noi diciamo che il vapore va molto veloce o che la vettura va troppo adagio, esprimiamo un'idea derivata in noi dal confronto delle impressioni del movimento del vapore o della vettura con un'idea tipo che tutti abbiamo nella memoria e che ci siamo formati a poco alla volta senza che ce ne accorgessimo. Noi dunque esprimiamo il risultato di un confronto, cioè un rapporto; ma questo rapporto è trovato all'ingrosso e non può per conseguenza che rappresentare imperfettamente la cosa. Quando però vorremo esprimere più esattamente questa velocità, diremo che quel battello a vapore fa, per es., 20 chilometri all'ora, o che la vettura non ne fa che 6. Ed infatti l'andare in fretta o adagio non vuol dire altro se non che il fare in un dato tempo più o meno cammino. Noi esprimiamo dunque la velocità di un dato corpo, indicando quanto spazio esso percorre in un dato tempo.

Questo tempo dato può essere un tempo qualunque, ma è preferibile che esso sia l'unità di tempo, come è preferibile che lo spazio sia indicato mediante l'unità ordinaria delle lunghezze, che per noi è il metro. Con ciò noi potremo formarci più prontamente l'idea di quello che si vuole esprimere. L'unità poi di tempo per il meccanico è d'ordinario il minuto secondo, a meno che non venga dichiarato qual'altra unità si adotti. Che se i dati raccolti non esprimessero il numero di metri percorsi in un minuto secondo, con un calcolo semplicissimo vi si arriverebbe. Infatti, per esprimere in metri per secondo la velocità del vapore che abbiamo supposto sopra, osserveremo che, essendo un'ora composta di 3600 minuti secondi, e percorrendo esso vapore 20000 metri in 3600 minuti secondi, in un minuto secondo esso percorrerà $m \cdot \frac{20000}{3600} = m \cdot 5,55$. Analogamente si troverebbe che la velocità della vettura sopra accennata corrisponde a $m \cdot 1,67$ (si intende per minuto secondo). Bisogna però osservare che questi numeri applicati agli esempi accennati non esprimerebbero che una velocità media, poichè, nei diversi momenti del loro percorso, è probabile che tanto il vapore quanto la vettura abbiano velocità maggiori o minori a seconda delle varie circostanze.

Definito con ciò che cosa intendiamo per velocità, riprendiamo i nostri studj sulla macchina d'Atwood.

Noi abbiamo supposto nel capitolo precedente di dar moto ai pesi della macchina mediante l'aggiunta di un peso addizionale da una parte; ma si potrebbe ottenere lo stesso risultato esercitando invece colla mano una pressione sopra uno dei pesi. La pressione della mano avrebbe lo stesso effetto del peso addizionale, solo che in questo caso ci sarebbe assai difficile il seguire colla mano il peso che discende mantenendovi una pressione costante, e perciò difficilmente il moto sarebbe *uniformemente* accelerato, come abbiamo visto sopra.

Ma, prescindendo da queste difficoltà pratiche, supponiamo

che la mano eserciti una pressione costante sul peso per un certo tempo e poi lo abbandoni. Che cosa avverrà in seguito? — La pressione della mano avrà comunicato ai pesi della macchina una velocità crescente più o meno a seconda della grandezza della pressione stessa e della massa totale in movimento, come abbiamo visto nel capitolo precedente. Questa velocità crescente avrà potuto raggiungere un valore tanto più grande, quanto maggiore sarà stato il tempo in cui avrà durato la pressione. Cessando poi la pressione, i pesi della macchina si troveranno animati entrambi dalla velocità raggiunta, e, se la macchina non presentasse alcuna resistenza, i pesi stessi continuerebbero a muoversi all'infinito, conservando la loro velocità costante. Avremmo allora quel moto che si chiama *uniforme* appunto per l'esservi la velocità sempre la stessa. Ma in fatto non è così; le resistenze, per quanto con ingegnosi ed accurati congegni possano essere ridotte a poco valore, pure non possono essere nulle. Ora, queste resistenze non potranno essere superate se non consumando una parte del movimento stato impresso ai due pesi, ossia consumando una parte dell'azione motrice stata comunicata ai pesi stessi, mentre agiva la pressione. Che il movimento di un corpo debba andar decrescendo quando vi si oppone una resistenza è del resto un fatto che vediamo ad ogni istante; ma importa assai il notare fin d'ora che, quando una certa massa è in movimento, essa può rappresentare per sé un'azione motrice eguale a quella che si è dovuta consumare per far acquistare a quella massa quel movimento, e che perciò quella massa può vincere da sé una resistenza, cedendo ad essa a poco a poco l'azione motrice accumulata e perdendo in conseguenza di velocità fino a ridursi in riposo. Così, se una pressione equivalente ai 4 grammi utili di peso ad dizionale supponiamo che abbia comunicato al sistema una velocità di 0",48 dopo 5 secondi, e supponiamo che il sistema venga da quest'istante abbandonato a

sè stesso e che i pesi incontrino nel loro movimento una resistenza equivalente a 4 grammi, la velocità del sistema si diminuirà precisamente di tanto di quanto si aumentò prima nello stesso tempo, e quindi dopo 5 secondi la velocità del medesimo sarà annullata. Che se invece supponiamo che la resistenza corrisponda solo ad 1 grammo, allora la diminuzione di velocità sarà 4 volte più piccola, e quindi, perchè si estingua la velocità del sistema, occorreranno 20 secondi in luogo di 5.

Ora un'altra osservazione. Se i due pesi della macchina invece che di due etto. cadauno si mettessero di quattro, lasciando tutto il resto come nell'ultimo esempio, il movimento si estinguerrebbe ancora dopo 20 secondi? — Per rispondere a questo quesito osserviamo che per far acquistare agli 8 etto-grammi i metri 0,48 di velocità si sarà dovuto esercitare o una pressione doppia per uno stesso tempo, oppure continuare la pressione di prima per un tempo doppio (vedi il capitolo precedente); in conclusione si sarà dovuto impiegare un'azione motrice doppia. Perciò dunque che si è osservato sopra, quando la resistenza si conservi la stessa, le diminuzioni di velocità saranno rispettivamente metà di prima e quindi il movimento durerà 40 secondi in luogo di 20. L'opposto invece sarebbe avvenuto se si fossero messi dei pesi più piccoli (1).

Conchiuderemo adunque che:

1.^o Se si comunica una certa velocità ai pesi della macchina d'Atwood e poi si abbandonano a sè stessi, essi continueranno a muoversi, ma con velocità decrescente finchè si arresteranno.

2.^o La diminuzione di velocità per ogni unità di tempo sarà costante quando le resistenze, che si oppongono al movimento, saranno costanti. Essa inoltre sarà direttamente proporzionale alla grandezza di queste resistenze ed inversamente proporzionale al peso della massa in movimento.

(1) Tutti questi fatti saranno facilmente mostrati in scuola coll'esperienza.

3.^o In conseguenza il movimento dei pesi, supposta sempre fissa la velocità comunicata da principio, durerà tanto più a lungo quanto più piccola sarà la somma delle resistenze da vincersi e quanto più grande sarà il peso totale in moto.

Il moto che abbiamo ora esaminato si chiama *uniformemente ritardato* perchè la velocità va diminuendo di quantità eguali per istanti eguali.

Ora aggiungiamo un'altra osservazione. Supposto che le resistenze, le quali si oppongono al movimento, corrispondano all'azione di un grammo di peso addizionale, è facile comprendere che, se noi aggiungeremo un grammo al peso che vogliamo far discendere e poi comunicheremo al medesimo una velocità, come già abbiamo detto, il moto successivo dei pesi non sarà più ritardato, poichè per superare le resistenze non farà più bisogno consumare parte dell'azione motrice accumulata nei pesi in moto (1). Il moto dunque dei due pesi non si diminuirà nè si aumenterà, ma sarà *uniforme*; vale a dire che potrà continuare all'infinito con velocità costante. Questo fatto è quello appunto che avviene in tutte le macchine; così la locomotiva continua per molte miglia il suo cammino senza alterare la sua velocità, perchè l'azione motrice, che essa sviluppa, è nè più nè meno di quanto è necessario per superare le resistenze che si oppongono al suo movimento. Che se queste resistenze venissero a decrescere, oppure l'azione del vapore venisse a crescere, tosto la locomotiva prenderebbe un moto accelerato. Se invece o le resistenze aumentassero o l'azione del vapore diminuisse, il moto della locomotiva si rallenterebbe.

Noi dunque potremmo fin d'ora concludere questo principio che, cioè:

(1) Non si tien calcolo qui della resistenza dell'aria che, aumentando rapidamente coll'aumentare della velocità, non potrebbe a rigore essere compensata con un peso fisso.

Il movimento di una macchina qualunque è uniforme quando l'azione motrice che essa riceve è appena sufficiente per vincere le resistenze che si oppongono al suo movimento; è accelerato, quando l'azione motrice supera le resistenze; è ritardato quando l'azione motrice non è sufficiente a vincere le resistenze.

CAPITOLO TERZO.

PRESSIONE E FORZA MOTRICE. — DETERMINAZIONI NUMERICHE.

Nei capitoli precedenti abbiamo visto che, fra il peso della massa in movimento, l'incremento di velocità che essa prende ad ogni istante dato, il peso addizionale o la pressione esercitata, vi sono delle relazioni, delle quali abbiamo indicato la natura. Ma ciò non basta: perchè le nostre cognizioni possano essere utili in pratica, ci è necessario arrivare a dei numeri, ossia ci è necessario saper trovare precisamente quale incremento di velocità per ogni unità di tempo si otterrà con un dato peso e con una data pressione, oppure qual pressione bisognerà esercitare per ottenere sopra un dato peso un dato incremento di velocità e così di seguito.

Prima però di entrare in queste determinazioni numeriche è necessario fare alcune spiegazioni sul significato di due parole che abbiamo già adoperato, voglio dire *pressione* ed *azione motrice*, o, come diremo d'ora in avanti, *forza motrice*.

La pressione, come quella che abbiamo esercitato colla mano o che abbiamo ottenuto col peso addizionale, si potrebbe definire lo sforzo corrispondente alla reazione che oppone un corpo ogni volta che noi cerchiamo di modificare il suo movimento, sia aumentandolo, sia diminuendolo, od anche impedendolo assolutamente. Così l'acqua che va sulle pale della

ruota idraulica vi esercita una pressione, perchè essa tende ad aumentare la velocità delle pale. Che se queste pale avessero già una velocità eguale a quella colla quale si muoverebbe l'acqua liberamente, non vi sarebbe più alcuna pressione; mentre la pressione sarebbe massima quando la ruota fosse ferma. — Il cavallo che tira un carro prova uno sforzo, che qui diremmo piuttosto di *trazione* e che è, anche in questo caso, massimo quando il carro è fermo, mentre diverrebbe nullo quando il carro corresse già da sè quanto correrebbe libero il cavallo (caso che avviene nelle discese). — Finalmente, quando noi muoviamo i pesi della macchina di Atwood colla mano, esercitiamo una pressione sul peso, perchè tendiamo ad imprimere alla mano una velocità maggiore di quella che ha il peso.

In conclusione noi vediamo che una pressione o una trazione o uno *sforzo*, in generale, ha luogo ogni volta che si trovano a contatto due corpi, i quali da sè avrebbero velocità differenti, ed in modo che l'uno di essi non possa realizzare il proprio movimento senza modificare quello dell'altro. Non potendo allora quest'altro corpo assumere il movimento che il primo tende a comunicargli, se non quando il movimento medesimo sia stato trasmesso a tutte le particelle elementari che lo compongono, ne nasce questa reazione, ed il corrispondente sforzo, che, come abbiamo già detto, è tanto più grande quanto più grande è l'aumento o la diminuzione di velocità che il corpo deve subire e quanto maggiore è la sua massa, ossia quanto maggiore è il numero delle particelle, alle quali quella variazione di velocità deve essere comunicata.

Veniamo ora alla *forza motrice*. Noi dobbiamo intendere con questa espressione quella parte di energia (movimento atomico o calore), che è necessaria per comunicare ad un corpo un dato movimento od anche per estinguere o diminuire in esso un movimento già esistente.

Volendo adunque calcolare quanta forza motrice noi dovremo impiegare, o quanto *lavoro* meccanico dovremo produrre per muovere i pesi della macchina della quale ci stiamo occupando, si concepisce che prima di tutto converrà conoscere la pressione che si esercita sui pesi stessi. Ma il conoscere quella pressione non è sufficiente, e neppure basta oltre a quella il conoscerne la durata; poichè la pressione che vi si esercita potrebbe anche non essere capace di produrre movimento (vedi Capitolo I); e laddove non v'è movimento, ossia laddove non v'è spazio percorso, non v'è *lavoro prodotto*, e quindi non v'è comunicazione di forza motrice (1). Questa importante proposizione potrà parere a prima vista non verificarsi in alcuni casi. Così, per esempio, è un fatto che se noi esercitiamo colla mano una certa pressione sopra un corpo, quand'anche esso non si muova, dopo qualche tempo noi ci troviamo stanchi, il che vorrebbe dire che abbiamo sviluppato del lavoro. Ma ciò avviene solo per una ragione fisiologica: egli è perchè abbiain dovuto tenere i muscoli in una posizione anormale, il che può portare poi una sensazione molesta nel nostro organismo. Ma se si tolgono queste cause speciali, è facile capire che la proposizione sopra enunciata si verifica per fettamente. In fatti, quando noi siamo seduti sopra una sedia o quando siamo coricati sul letto, non esercitiamo forse una pressione di ben 70 chilogrammi e per molte ore, senza che nessuno di noi pensi momentaneamente di far del lavoro? L'acqua del nostro bacino, o meglio quella di una vasca, o quella del mare, non esercitano sui loro fondi delle pressioni corrispondenti ai loro pesi? Eppure qual'è la forza motrice che esse possono

(1) Quando si esercita una pressione sopra un corpo, il quale non può prendere movimento sotto l'azione della pressione stessa, esso si comprime o in generale si deforma. Vi ha allora una produzione di lavoro meccanico finchè dura il periodo della deformazione, essendovi in fatto in quel periodo un movimento.

somministrare, qual'è il lavoro che possono produrre? Nulla, finchè esse non discendano da qualche altezza, cioè finchè non possano percorrere uno spazio sotto l'azione della gravità. — Il vapore contenuto nella calaja della locomotiva non produce esso pure alcun lavoro finchè vi è rinserrato, essendo chiuso al medesimo l'accesso ai cilindri. Tant'è vero che in quel caso non sarebbe nemmeno necessario fornire nuovo combustibile alla macchina, se non fosse per riparare le perdite di calore che hanno luogo per irradiazione attraverso alle pareti della calaja, mentre, quando la macchina lavora, è il combustibile che deve somministrare la forza motrice sviluppata, riproducendo continuamente il vapore che viene consumato (1).

Noi dunque possiamo concludere che la quantità di forza motrice consumata per ottenere un dato effetto, dipende e dalla pressione o sforzo che avrà luogo nel punto in cui la forza motrice agisce sul corpo, e dallo spazio che questo punto avrà percorso: anzi possiamo dire che essa è rappresentata dal loro prodotto. Per dimostrare meglio quest'ultimo fatto possiamo ricorrere ad una semplicissima esperienza. Poniamo in fatti di avere una bilancia comune e mettiamo sopra uno dei piattelli un peso fisso, per esempio, di un chilogrammo. Se la bilancia è giusta, mettendo un altro chilogrammo sull'altro piatto, deve aver luogo l'equilibrio, poichè in fatti in tal caso il lavoro che tenderebbe a produrre l'uno dei pesi facendo traboccare la bilancia da una parte, sarebbe eguale a quello che in un egual tempo produrrebbe l'altro peso facendo traboccare la bilancia dal lato opposto. Ma se noi attacchiamo il secondo peso, per esempio, a metà distanza fra il punto di sospensione del giogo e il punto medio di sospensione del piattello, troveremo allora che la bilancia

(1) Si suppone qui che il lettore o l'allievo abbiano qualche nozione sulle macchine a vapore: nel caso contrario vi potrebbe supplire una spiegazione di chi insegna.

trabocca dalla parte del primo piattello; il che vuol dire che il lavoro prodotto dal peso più lontano dall'asse di rotazione della bilancia è maggiore di quello contrario prodotto in pari tempo dal peso posto a metà distanza, e ciò benchè i due pesi, e quindi gli sforzi locali esercitati dai medesimi, siano ancora eguali. Ma egli è che gli spazj percorsi dai medesimi qui non sono più eguali; poichè il peso che trovasi a metà distanza dall'asse di rotazione percorre in pari tempo un arco di lunghezza metà di quello del primo; quindi il lavoro che esso produce è metà di quello dell'altro. Ed infatti noi ristabiliremo l'equilibrio ponendo 2 chilogrammi invece di uno dalla parte ove la distanza dall'asse di rotazione è metà (1). La stessa esperienza si potrà ripetere ponendo uno dei pesi a distanze differenti; e si troverà sempre che, per mantenere l'equilibrio, bisogna mettere dall'una parte dei pesi tanto più grandi quanto più piccole sono le loro distanze dall'asse di rotazione per rispetto a quella del peso dall'altra parte, o più precisamente si troverà che, per produrre un egual lavoro da una parte o dall'altra, *i pesi dovranno essere inversamente proporzionali alle loro distanze dall'asse di rotazione.* — Essendo adunque dimostrato che il lavoro prodotto con uno stesso peso, ossia con una stessa pressione, varia in proporzione diretta degli spazj percorsi dalla medesima, ed essendo d'altra parte evidente che il lavoro stesso sarà pure direttamente proporzionale alla detta pressione, si può concludere che il lavoro prodotto o la quantità di forza motrice consumata saranno in proporzione del prodotto dello sforzo locale per lo spazio

(1) Oppure noi potremmo anche ragionare così. Essendo l'uno dei pesi posto sul piatto e l'altro attaccato al giogo a metà del braccio del medesimo, questo secondo peso per discendere dovrebbe far salire l'altro di uno spazio doppio di quello da cui esso è disceso. Ma in tal caso esso dovrebbe imprimere all'altro peso un'accelerazione di velocità doppia della propria, e perciò, per quanto si è visto fin dal primo capitolo, la pressione, ossia il peso che la produce, deve essere doppio.

percorso dal medesimo, e che quindi potranno avere per misura questo prodotto prendendo per unità un insieme dell'unità adottata per il peso o sforzo locale e di quella della lunghezza. L'unità infatti che si adotta è il *chilogrammetro*, il quale rappresenta appunto il lavoro prodotto esercitando lo sforzo di un chilogrammo per lo spazio di un metro. Talora poi trattandosi di grandi forze motrici, si preferisce prendere per unità di peso la tonnellata e si ha con ciò un'unità mille volte più grande, detta la *grande unità dinamica*. Finalmente per le macchine, essendo necessario tener calcolo anche del tempo nel quale un dato lavoro si produce, si usa assai sovente un'altra unità, che fu introdotta da Watt, il grande perfezionatore delle macchine a vapore, e che consta di 75 *chilogrammetri sviluppati in un minuto secondo*: questa unità è quella che chiamasi *callo-vapore*.

Da tutto ciò che abbiamo detto possiamo adunque concludere che lo *sforzo locale*, che misuriamo in chilogrammi, come abbiamo visto, è una cosa ben diversa dalla *forza motrice* o dal lavoro prodotto, e che non si può misurare se non con un'unità composta di sforzo e spazio. Mediante opportuni congegni vedremo che un uomo solo potrebbe esercitare uno sforzo variabile da pochi grammi fin quasi all'indefinito; eppure la forza motrice che può sviluppare è sempre la stessa, ed il lavoro che può produrre è sempre lo stesso: anzi il lavoro *utile* massimo andrebbe sempre decrescendo mano mano che si moltiplicassero i meccanismi in grazia delle resistenze passive che ne assorbirebbero una parte sempre maggiore. Il confondere lo sforzo locale colla forza motrice ha dato luogo a tante utopie, con cui molti meccanici, poco esperti in questa scienza, perdettero inutilmente tempo, ingegno e danaro, credendosi di migliorare organi meccanici, di inventare nuovi sistemi di macchine motrici, oppure anco di trovare la tanto sospirata macchina che *va da sé*. Ricordiamoci dunque che la meccanica sotto questo riguardo non può fare

altro se non che trovare quei congegni, col mezzo dei quali la forza motrice venga applicata nel modo il più opportuno per dare il maggior effetto utile, nel mentre che il lavoro, a produrre il quale la macchina è destinata, si effettui nel modo il più conveniente (1).

Ora possiamo finalmente occuparci della maniera di calcolare precisamente le varie quantità di cui abbiamo parlato fino ad ora. Perciò ritorniamo al primo esempio accennato parlando della macchina d'Atwood. Noi avevamo supposti i due pesi ciascheduno di 2 ettogrammi ed il peso addizionale, che produceva il movimento, di 5 grammi, mentre si era detto che le resistenze passive assorbivano un'azione motrice corrispondente a quella di un grammo di peso addizionale. In tal caso restava l'azione utile del peso addizionale ridotta a 4 grammi. Ciò posto, noi vogliamo calcolare quale sarà l'aumento o accelerazione di velocità, che verrà comunicata ai pesi per ogni minuto secondo. — Noi abbiamo allora dimostrato che questo incremento di velocità è direttamente proporzionale al peso addizionale ossia alla pressione esercitata, ed è inversamente proporzionale al peso messo in movimento. Per determinarne dunque il valore assoluto, basterebbe conoscere il valore di questa accelerazione per una data pressione e per un dato peso da muoversi. Ora, se, essendo il peso addizionale di 4 grammi, il peso totale in moto fosse pure di 4 grammi; oppure, in altri termini, se il peso di 4 grammi cadesse liberamente, l'esperienza ha provato che l'accelerazione di velocità, che esso prenderebbe per minuto secondo, è di metri 9,81 circa; valore però che varia alquanto a seconda delle latitudini, poichè a latitudini differenti l'azione dell'attrazione terrestre non si fa sentire colla stessa energia. La stessa accelerazione di velocità poi si avrebbe non solamente

(1) Si potranno facilmente trovare esempj pratici di ciò nei meccanismi mossi a mano con manovelle od anche nelle macchine mosse da ruote idrauliche, ecc.

quando il peso è di 4 grammi, ma qualunque fosse il peso, purchè l'azione corrispondente della gravità sia impiegata unicamente per muovere il medesimo.

Sapendosi adunque che l'accelerazione di velocità, che avrebbe luogo per minuto secondo quando il peso totale in moto non fosse che 4 grammi, sarebbe di metri 9,81, ne verrà che, essendo invece il peso in moto di chil. 0,405, l'accelerazione stessa sarà minore e precisamente sarà tante volte più piccola quante volte 4 grammi stanno in 405 grammi, cioè essa sarà eguale a Met. $9,81 \times \frac{4}{405} = 0^m,097$ circa.

In generale, chiamando con P il peso in movimento, con f il peso addizionale o la pressione (dedotto per ora quanto va perduto per compensare le resistenze passive) e finalmente con g il numero fisso 9,81, e con φ l'accelerazione prodotta per ogni minuto secondo, potremo scrivere la formola meccanica

$$\varphi = \frac{g}{P} f. \quad (I)$$

Con ragionamenti affatto analoghi si potrebbe trovare il valore della pressione o peso addizionale necessario per produrre una data accelerazione di velocità, od il peso che deve essere in moto quando ha luogo una data pressione ed una data accelerazione di velocità. Ma tutto ciò si potrà ottenere più brevemente risolvendo la formola (I) colle regole ordinarie dell'algebra. Si avrà allora:

Per il valore della pressione o sforzo locale

$$f = \frac{P}{g} \varphi. \quad (II)$$

Per il valore del peso in moto

$$P = f \frac{g}{\varphi}. \quad (III)$$

Il rapporto $\frac{P}{g}$, che vediamo apparire in queste formole, è un numero costante, benchè sotto diverse latitudini possano per uno stesso corpo essere diversi e il suo peso e l'accelerazione di velocità, che esso riceverebbe per minuto secondo cadendo liberamente; poichè, laddove fosse più grande questa accelerazione di velocità, sarebbe pure maggiore nella stessa proporzione il peso del corpo, cioè lo sforzo necessario per impedirne la caduta. Questo rapporto chiamasi in meccanica la *massa*, poichè esso è infatti un numero proporzionale alla quantità di particelle materiali contenute nel corpo, il che è appunto ciò che intendiamo dire parlando di massa nel linguaggio ordinario.

Chiamando allora con M la massa, ed introducendo questo nuovo simbolo nelle formole sopra esposte, si potranno scrivere le seguenti affatto identiche, cioè:

$$\varphi = \frac{f}{M} \quad (\text{IV})$$

$$f = M\varphi \quad (\text{V})$$

e, volendo, potremo aggiungere

$$M = \frac{f}{\varphi}. \quad (\text{VI})$$

Con ciò noi abbiamo modo di risolvere facilissimamente tutte le questioni relative alle accennate quantità, dalle quali risulta il movimento della macchina. — Quanto poi alla forza motrice impiegata, oppure al lavoro prodotto dalla pressione o peso addizionale, esso sarà evidentemente eguale al peso addizionale stesso od alla pressione esercitata di 4 grammi moltiplicata per lo spazio da cui essa sarà discesa; ben inteso che, se noi vorremo ottenere questo lavoro espresso in chilogrammetri, dovremo esprimere anche la pressione in chilogrammi (Ch.ⁱ 0,004) e lo spazio percorso in metri.

CAPITOLO QUARTO.

LE LEGGI DEL MOVIMENTO: POTENZA VIVA.

Fino dal principio noi abbiamo osservato che il movimento dei pesi della macchina d'Atwood, quando la forza motrice opera costantemente, è *uniformemente accelerato*, vale a dire che la velocità dei pesi va crescendo continuamente ed uniformemente di quantità eguali per tempi eguali: che il movimento stesso può essere *uniforme* quando la velocità dei pesi stessi è mantenuta costante, e che finalmente può essere *uniformemente ritardato* quando invece vi ha una resistenza costante non equilibrata, che tende ad estinguere il movimento. Ora dovremo occuparci di trovare le relazioni matematiche, le quali hanno luogo fra lo spazio percorso, il tempo impiegato e la velocità in questi diversi movimenti.

Quando il moto è uniforme, la velocità essendo costante, lo spazio percorso in ogni unità di tempo è sempre lo stesso, e perciò riesce facilissimo in ogni caso il trovare lo spazio percorso in un dato tempo o il tempo necessario per percorrere un dato spazio, o finalmente la velocità, dato lo spazio percorso e il tempo impiegato. Così, nell'esempio che avevamo accennato al capitolo secondo, si era già visto come, sapendosi che il battello a vapore percorreva 20 chilometri in un'ora, ossia 20000" in 3600 secondi si era trovata la velocità del vapore (in metri

per secondo) di M.ⁱ 3,55, e ciò mediante una semplice divisione. Operando allo stesso modo si sarebbe ottenuto lo stesso risultato quando si fosse conosciuto, invece dello spazio percorso in un' ora, la distanza percorsa in un tempo qualunque dato.

Chiamando adunque con v la velocità, con s uno spazio qualunque percorso e con t il tempo impiegato a percorrerlo si avrà:

$$v = \frac{s}{t} \quad (1)$$

e quindi $s = v t \quad (2)$

e $t = \frac{s}{v} \quad (3)$

formole, colle quali si risolveranno tutte le questioni relative a questo genere di movimento.

Non così facili però riescono le analoghe relazioni quando il moto è uniformemente accelerato od uniformemente ritardato; poichè allora la velocità che nel caso precedente era sempre la stessa per tutta la durata del movimento, è invece in ogni istante diversa. Incominciando dal moto uniformemente accelerato, osserviamo che in esso la velocità si aumenta di una quantità costante per ogni unità di tempo. Se dunque il corpo, partendo dalla quiete, ha raggiunto in fine del primo minuto secondo la velocità γ , potremo dire che dopo due minuti secondi la sua velocità sarà divenuta 2γ ; dopo tre minuti secondi sarà divenuta 3γ , ed in generale dopo t minuti secondi sarà γt . La quantità dunque di cui si sarà aumentata la velocità del corpo in un tempo qualunque si otterrà *moltiplicando l'accelerazione di velocità per minuto secondo per il tempo trascorso espresso pure in minuti secondi*. Quindi, se al principio di questo tempo la velocità del corpo era v , noi potremo scrivere

$$v = v_0 + \gamma t \quad (4)$$

e, se il corpo non aveva alcuna velocità al principio di questo tempo, sarà:

$$v = \varphi t \quad (5)$$

dalla quale si potrà anche ottenere

$$t = \frac{v}{\varphi} \quad (6)$$

pel tempo necessario per acquistare una data velocità e

$$\varphi = \frac{v}{t} \quad (7)$$

volendosi calcolare l'accelerazione di velocità per minuto secondo essendo data la velocità acquistata in un numero dato di minuti secondi.

Rimane ora da calcolarsi lo spazio percorso; ma qui ci troviamo dinanzi una difficoltà a primo aspetto assai grave, che è il continuo variare della velocità durante il movimento. Osservando però che la velocità varia nel movimento che consideriamo in modo uniforme, vale a dire in modo che gli aumenti o diminuzioni della medesima in un istante qualunque di determinata lunghezza sono sempre gli stessi, possiamo dichiarare che lo spazio percorso in un dato tempo sarà lo stesso di quello che si otterrebbe supponendo che per tutta la durata t del movimento la velocità sia costante ed eguale alla media fra la velocità al principio e quella acquistata al fine del tempo stesso. L'espedito dell'adottare il valore medio di una quantità, quando essa varia durante il periodo che si considera, è usato spessissimo in pratica, ma non sempre è questo un metodo esatto; molte volte anzi è un ripiego per far presto o per non poter fare di meglio. Perchè i risultati trovati a questo modo siano giusti bisogna che da una parte e dall'altra, per così dire, del punto a cui corrisponde realmente il valore assunto la quantità varii in modo che, se noi prendiamo da

una parte un punto qualunque, in cui quella quantità abbia un valore inferiore a quello assunto, dall'altra si debba trovare un altro punto simmetrico, per cui la stessa quantità abbia un valore maggiore di quello assunto precisamente di tanto quanto l'altro ne era minore, ed in modo che l'errore in più che faremmo da una parte venga compensato dall'errore in meno che facciamo dall'altra. Ora, ciò avviene appunto esattamente nel caso nostro. In fatti, supponiamo, p. es., che la durata t del movimento sia di 10 secondi, e che l'accelerazione per ogni minuto secondo sia di un centimetro: la velocità acquistata alla fine sarà di 10 centimetri, ritenendo zero la velocità al principio. La velocità media sarà allora di $0^m,05$, velocità che corrisponderebbe realmente alla fine del quinto minuto secondo. Ora, se noi prendiamo un istante qualunque prima di questo, ad esso corrisponderà una velocità minore, e precisamente se τ è la differenza di tempo fra quest'istante e quello medio, la velocità in quest'istante sarebbe $0^m,05 - 0,01 \tau$: ma, oltrepassando l'istante medio di un tempo τ , noi troveremo una velocità di $0^m,05 + 0,01 \tau$ che farà il compenso alla prima.

Avremmo potuto del resto dimostrare la cosa più speditamente osservando che le velocità acquistate nei successivi istanti componenti il tempo totale formano una progressione per differenza, e che, siccome ciascun termine della progressione moltiplicato per la durata costante di ciascun istante darebbe lo spazio percorso con moto uniforme in quest'istante, spazio che si potrebbe ritenere eguale al vero quando quell'istante fosse indefinitamente piccolo, così la somma dei termini della progressione, moltiplicata pure per questa durata costante, dovrà dare lo spazio totale percorso. Ora, la somma dei termini della progressione è appunto la media del primo e dell'ultimo termine moltiplicata per il numero dei termini, ossia degli istanti; e quest'ultimo numero, moltiplicato poi per la durata di ciascun istante, non essendo altro che il tempo

totale, ne conchiuderemo finalmente che *lo spazio percorso con moto uniformemente accelerato in un tempo dato è eguale alla media delle velocità al principio e alla fine di questo tempo moltiplicato per il tempo stesso. (1).*

Ciò posto chiamiamo, come già abbiamo fatto precedentemente, con φ l'accelerazione di velocità per minuto secondo, con t la durata del movimento, con s lo spazio percorso e con v la velocità acquistata alla fine, e finalmente con v_0 la velocità iniziale, pel caso in cui il corpo avesse già moto al principio del tempo t . Noi avremo allora la velocità media pel caso generale eguale a $\frac{v_0 + v}{2}$ e, siccome la velocità v sarà eguale a $v_0 + \varphi t$, così la stessa velocità media si potrà meglio esprimere con

$$\frac{v_0 + v_0 + \varphi t}{2} = v_0 + \frac{\varphi t}{2}.$$

Moltiplicando questa velocità media per il tempo otterremo

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2 \dots\dots\dots (8)$$

Nel caso in cui la v_0 fosse nulla, allora la velocità media è $\frac{v}{2}$ e lo spazio è

$$s = \frac{v}{2} t = \frac{1}{2} \varphi t^2 \dots\dots\dots (9).$$

Mediante le formole (4) e (8), oppure (5) e (9), si possono, cogli opportuni calcoli, risolvere tutte le questioni relative al moto uniformemente accelerato.

Vediamo ora se l'esperienza viene a convalidare i risultati dei nostri ragionamenti, e per questo scopo la macchina di

(1) In una lezione orale si potrà dare maggior sviluppo all'ultima dimostrazione accennata, spiegando meglio l'idea degli istanti indefinitamente piccoli.

Atwood ci servirà con tutti i suoi organi accessorj, essendo essa appunto destinata a quest'uso.

Supponiamo dunque che i pesi adattati alla macchina siano ciascheduno di ch. 0,1 ed incominciamo a trovare il peso addizionale, il cui lavoro corrisponda al lavoro che assorbono le resistenze passive durante il movimento. Il modo di calcolare queste resistenze passive ed il lavoro motore che esse assorbono verrà trattato più innanzi: ma pel nostro caso ci basterà osservare che, aggiungendo questo pesetto addizionale ad uno dei pesi della macchina, indi comunicando colla mano a questo peso un moto discendente, questo moto dovrà conservarsi poi uniforme. Noi dunque potremo desumere con pochi tentativi il valore di questo peso, il quale, del resto, se la macchina fosse costrutta colla precisione voluta quando debba servire realmente per esperienze di gabinetto, dovrebbe essere quasi trascurabile. Noi supporremo come prima che esso sia di un grammo. Ora, colle formole trovate, cerchiamo il peso addizionale necessario per produrre il movimento in modo che lo spazio percorso nel primo minuto secondo sia, p. es., di 0^m,40. Perciò, ricorrendo all'equazione (9), e facendovi $t = 1$ noi otterremo

$$s = \frac{1}{2} \varphi \quad \text{e quindi}$$

$$\varphi = 2s = 2 \times 0,40.$$

Da questa equazione noi vediamo dunque che l'accelerazione di velocità per minuto secondo è il doppio dello spazio percorso nel primo minuto secondo, e che essa sarà quindi nel nostro caso di 0^m,80. Ora, per trovare la pressione o peso addizionale necessario per produrre l'accelerazione di velocità di 0^m,80 occorrerebbe conoscere la massa totale in movimento, e quindi anche il peso addizionale che cerchiamo: ma, non occorrendo qui che un'approssimazione, basterà supporre la

massa eguale a quella dei due pesi, cioè, in base a quanto si è detto nel capitolo precedente, supporremo

$$M = \frac{0^{\text{m}}201}{9,71} = 0,02.$$

Allora avremo la pressione o il peso addizionale:

$$f = 0,02 \times 0,80 = 0,016 \text{ chilogrammi:}$$

occorrerebbe dunque un peso addizionale di 16 g.¹

Ora conviene rifare il calcolo onde trovare esattamente quale dovrà essere l'accelerazione di velocità per minuto secondo. — Avremo la massa totale di:

$$\frac{0^{\text{m}},217}{9,81} = 0,022$$

e quindi sarà:

$$\varphi = \frac{0,016}{0,022} = 0^{\text{m}},73.$$

In tal caso dovrebbe essere lo spazio percorso nel primo minuto secondo di 0^m,365. Perciò, mettendo il disco A a M.¹ 0.365, che leggeremo sul regolo posto a fianco, e collocando il peso corrispondente aumentato dei pesi addizionali, come si è detto, in corrispondenza al principio della scala, quando noi lo metteremo in libertà esso dovrà battere sul disco, precisamente alla fine del primo minuto secondo. La leva *l* serve ad agevolare quest'operazione liberando il peso e mettendo contemporaneamente in moto l'indice, il quale segna i minuti secondi e dà quindi modo di apprezzare più facilmente il tempo impiegato.

Abbiamo visto precedentemente come dall'equazione dello spazio si derivi che l'accelerazione di velocità per minuto secondo, oppure la velocità acquistata nel primo minuto secondo partendo dalla quiete, sia doppia dello spazio percorso nello stesso primo minuto secondo. Anche questo fatto può essere

sere perfettamente verificato colla macchina d'Atwood. In fatti, ripetiamo la stessa esperienza di prima, ma mettiamo l'anello B al posto del disco ed il disco portiamolo a M.ⁱ 0,77 sotto l'anello. Il peso addizionale per la sua forma rimarrà sull'anello, ed il peso normale, aumentato del grammo necessario per eliminare l'effetto delle resistenze passive, dovrà allora passare oltre con moto uniforme e colla velocità acquistata al momento in cui il peso addizionale veniva lasciato sull'anello. Con tale velocità noi troveremo che il peso percorrerà M.ⁱ 0,77, cioè uno spazio doppio di quello percorso nel primo, poichè esso dovrà battere sul piatto, precisamente nell'istante in cui il pendolo segna il secondo minuto secondo.

Un'altra esperienza che potremo fare sarebbe quella di verificare la legge con cui variano gli spazj percorsi in diversi tempi. Dalla formola (9) facendo $t=2$ si ha $S=\frac{1}{2}g \times 4$;

facendo $t=3$ si ha $S=\frac{1}{2}g \times 9$, ed in generale si ha che gli spazj percorsi variano come i quadrati dei tempi impiegati. Noi potremo verificare facilmente questa legge per due minuti secondi. Infatti, leviamo l'anello e abbassiamo il disco finchè esso corrisponda ad un'altezza di M.ⁱ 1,54. Mettendo allora in libertà il peso, come si è già indicato, esso batterà sul disco precisamente mentre il pendolo segna il secondo minuto. Volendo fare la stessa esperienza per tre o più minuti secondi, bisognerebbe allora diminuire il peso addizionale, calcolandolo in modo che gli spazj percorsi siano compatibili coll'altezza della macchina.

Per completare questo argomento accenneremo come colle formole esposte si possano risolvere altri problemi relativi al movimento uniformemente accelerato. Così se, per esempio, fosse data la velocità acquistata e la velocità iniziale e l'accelerazione di velocità per unità di tempo, si potrebbe trovare lo spazio che deve essere stato percorso dal corpo, senza aver bisogno di conoscere il tempo che ha durato il movimento. In

fatti, ponendo che, per brevità, la velocità iniziale sia nulla, dall'equazione (5) noi ricaveremo:

$$t = \frac{v}{\varphi}$$

essendo in questo nostro caso noti v e φ . Con ciò conosceremmo il tempo e potremmo quindi risolvere il problema come precedentemente. Ma facendo la risoluzione algebrica, cioè mettendo nell'equazione (9) in luogo di t la sua espressione equivalente, avremo:

$$s = \frac{1}{2} \varphi \frac{v^2}{\varphi^2} = \frac{v^2}{2\varphi} \quad (10)$$

e con ciò abbiamo ottenuto un'equazione, che ci permette di risolvere il problema proposto senza occuparci per nulla del tempo. È con questa formola che si calcola, per es., nell'idraulica, l'altezza da cui teoricamente deve discendere un corpo d'acqua per acquistare una data velocità.

Un altro problema pure assai interessante è il problema inverso del precedente, vale a dire: essendo dato lo spazio percorso e l'accelerazione di velocità, trovare la velocità che verrebbe acquistata dopo percorso tutto quello spazio. Questo problema si risolve colla stessa formola del precedente: solo che in questo caso v è incognito mentre s è noto. Perciò, risolvendo l'equazione rispetto a v , si avrà:

$$\begin{aligned} v^2 &= 2\varphi s & \text{e quindi} \\ v &= \sqrt{2\varphi s}. \end{aligned} \quad (11)$$

È questa la formola con cui si calcola la velocità colla quale l'acqua, per es., arriva sulle ali di una ruota idraulica, conoscendo l'altezza dalla quale quest'acqua discende; oppure anche la velocità con cui esce (teoricamente) l'acqua da un foro, conoscendo l'altezza del livello dell'acqua sopra questo foro, ecc.

Questi due problemi, che abbiamo accennato in particolar modo, perchè di grandissima importanza nella pratica, bastano

per dimostrare come colle formole date si possano risolvere tutte le questioni relative al moto uniformemente accelerato dei corpi, purchè siano dati elementi sufficienti per determinare il moto stesso. Passiamo ora a quell'altro genere di movimento che abbiamo detto uniformemente ritardato.

Se noi leviamo dalla nostra macchina d'Atwood i pesi addizionali, compreso anche quello che vi avevamo posto per compensare l'effetto delle resistenze, e comunichiamo ai pesi una velocità qualsiasi, abbandonandoli poi a loro stessi, abbiamo già detto che il loro moto sarà uniformemente ritardato. Abbiamo già anche in parte esaminata la natura di questo movimento e possiamo quindi senz'altro passare alle formole relative, le quali non differiranno da quelle del moto accelerato se non che nel segno della quantità γ che qui dovremo dire *ritardamento di velocità*. Avremo dunque, ritenendo le solite denominazioni :

$$v = v_0 - \gamma t \quad (12)$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} \gamma t^2. \quad (13)$$

La prima di queste formole ci dà la velocità, che rimane al corpo, il quale al principio aveva una velocità v_0 , dopo essersi mosso per un tempo t . La seconda darà lo spazio percorso nel tempo stesso.

Con queste due formole si possono risolvere tutte le questioni relative al moto uniformemente ritardato. Così, per es., supponiamo che si volesse trovare quanto tempo durerebbe il movimento dei pesi della nostra macchina, conoscendosi la velocità comunicata ai medesimi al principio ed il ritardamento di velocità prodotta dalle resistenze. In tal caso noi lo ricaveremo dalla prima equazione, osservando che v dovrà essere nullo o che quindi si avrà :

$$\gamma t = v_0$$

da cui

$$t = \frac{v_0}{\varphi}.$$

Osserveremo qui, benchè sia quasi superfluo, che il valore di t trovato è lo stesso che occorrerebbe perchè un corpo con un'accelerazione di velocità eguale a φ acquistasse la velocità v_0 partendo dalla quiete.

Se ora si volesse trovare lo spazio che avrebbero percorso i pesi, non si avrebbe che a sostituire nella formola seconda a t il suo valore $\frac{v_0}{\varphi}$. Sarebbe del resto facile l'accorgersi che si dovrà ottenere nè più, nè meno che

$$\frac{v_0^2}{2\varphi},$$

cioè lo spazio che dovrebbe percorrere il corpo con una accelerazione di velocità φ onde acquistare la velocità v_0 . Ed infatti sostituendo si ha

$$s = v_0 \frac{v_0}{\varphi} - \frac{1}{2} \varphi \frac{v_0^2}{\varphi^2},$$

ossia

$$s = \frac{v_0^2}{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\varphi} = \frac{v_0^2}{2\varphi}. \quad (14)$$

In virtù di questa legge l'acqua cadendo o discendendo da una certa altezza acquisterebbe tanta velocità quanta ne occorrerebbe per risalire poi ad una altezza pari a quella da cui è discesa. Così il pendolo, spostato dalla sua posizione più bassa, vi dovrebbe ritornare con una velocità tale da farlo risalire dalla parte opposta ad una altezza eguale a quella da cui esso era disceso.

Gli indagatori del moto perpetuo, che tanto si affaticarono il cervello nei tempi scorsi e di cui non mancano infortunati seguaci anche oggi, trovarono in questi ed in simili altri fatti grandi speranze; ma la pratica è invece inesorabile nel negare la sua perfetta conferma alle leggi teoriche. E la ragione sta in ciò che nessun corpo può muoversi in pratica senza spostarne altri o senza incontrare in qualche modo delle resistenze. Ora, queste resistenze, di qualunque natura esse siano, producono un ritardamento nella velocità teorica tanto quando il movimento del corpo è ritardato come quando è accelerato, e quindi ad ogni fase del movimento la velocità in un dato istante riesce minore di quella che dovrebbe essere teoricamente. È perciò che l'acqua nelle fontane non risale che ad un'altezza assai minore di quella da cui proviene, ed è perciò che il pendolo finisce coll'arrestarsi presto o tardi se non gli viene ad ogni oscillazione comunicato un nuovo impulso. Il buon meccanico studia il modo di rendere queste resistenze più piccole che sia possibile compatibilmente colla convenienza; ma chi si occupasse di renderle nulle perderebbe il proprio tempo, mostrando di non conoscere le leggi generali che regolano l'universo.

I risultati che abbiamo sopra ottenuti colle formole si possono pure verificare colla macchina di Atwood. Solo che, per rendere il ritardamento di velocità abbastanza sensibile, converrebbe applicare un piccolo freno alla puleggia onde aumentarne le resistenze. Allora si disponga l'anello per tentativi in modo che, con un dato peso addizionale, lo spazio fra l'origine e l'anello stesso venga percorso, per esempio, in un minuto secondo preciso. Con ciò potremo calcolare facilmente l'accelerazione di velocità comunicata realmente ai pesi; e, siccome d'altra parte, conoscendo il peso addizionale, si può pure calcolare l'accelerazione di velocità che esso avrebbe dovuto comunicare alla massa in moto se non vi fossero state le resistenze passive, così la differenza di queste due accelerazioni rappresenterà il ritar-

damento di velocità prodotto dalle resistenze. Con ciò potremo dunque calcolare quanto tempo dovrà durare il movimento dei pesi dopo oltrepassato l'anello, ed anche quanto spazio verrà percorso: se questo spazio sarà compatibile coll'altezza della macchina, noi potremo colla macchina stessa verificare i risultati dati dal calcolo.

Le formole ora accennate per il moto uniformemente ritardato ci danno modo di risolvere un altro importante problema. Noi abbiamo già detto che una massa in movimento può rappresentare per sè un'azione motrice eguale a quella che si è dovuto consumare per far acquistare a quella massa quel movimento. Ora, data la massa e data la velocità dalla quale essa è animata, si tratta di calcolare il valore di questa potenza motrice, per così dire, accumulata nella massa, e che chiamasi comunemente *potenza viva*. Perciò osserviamo che un corpo, il quale possiede una velocità v può muoversi per uno spazio eguale a $\frac{v^2}{2\gamma}$, superando una resistenza tale da produrre nel medesimo tempo un ritardamento di velocità eguale a γ per minuto secondo. Chiamando F lo sforzo o pressione che bisognerebbe esercitare sul corpo onde ottenere nel medesimo l'accennata diminuzione di velocità, sarà F moltiplicata per lo spazio $\frac{v}{2\gamma}$, che percorro il corpo, il lavoro resistente capace di distruggere tutta la velocità del medesimo, ossia sarà questo lavoro resistente precisamente eguale alla potenza motrice contenuta nel corpo, o, come si suol dire, alla sua potenza viva. Non resta quindi che a trovare questo F , per il che basta osservare che, essendo M la massa del corpo ed essendo γ , come si è detto, la diminuzione di velocità per unità di tempo, noi avremo

$$F = M \gamma,$$

ed allora, sostituendo questo valore, otterremo la potenza viva della massa in moto eguale a

$$Mg \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2} Mv^2$$

Dunque la potenza viva di una massa in moto è misurata *dal prodotto della metà della massa pel quadrato della velocità dalla quale essa trovasi animata.*

Così, per esempio, per un maglio del peso di 70 chilogrammi che cadendo avesse acquistato una velocità di 6 metri al minuto secondo, la potenza viva sarebbe

$$\frac{1}{2} \times \frac{70}{9.81} \times 36 = 126 \text{ chilogrammetri.}$$

Ora, siccome si è detto che questa potenza viva non rappresenterebbe che il lavoro motore stato necessario per fare acquistare al corpo la velocità data, in questo caso, essendo la forza motrice la gravità, il lavoro motore prodotto dalla medesima sarebbe eguale al prodotto del peso del maglio per l'altezza da cui esso è caduto. Ricercando quindi quest'altezza (necessaria per acquistare 6 metri di velocità) e moltiplicandola pel peso di 70 chilogrammi, si troveranno ancora i 126 chilogrammetri, verifica che lasciamo alla diligenza dei lettori.

Termineremo quest'argomento con un'altra osservazione importante. Quando un corpo si muove e, come avviene in pratica, esso trovasi sotto l'azione di forze motrici e di resistenze, il suo movimento è, come abbiamo già detto, accelerato, ritardato od uniforme a seconda che prevale il lavoro delle forze motrici, oppure quello delle resistenze, oppure che entrambi i lavori sono eguali. Ora, nel primo caso, la potenza viva del corpo dopo un certo tempo sarà maggiore che in principio, e la differenza positiva delle due potenze vive esprimerà precisamente il lavoro motore accumulato, ossia il lavoro motore svi-

luppato in quel tempo in di più di quello assorbito dalle resistenze. Nel secondo caso la potenza viva dopo un certo tempo sarà minore che al principio, ed allora la differenza negativa delle potenze vive rappresenterà il lavoro delle resistenze sviluppato in quel tempo in più di quello sviluppato dal motore. Finalmente pel terzo caso la differenza delle potenze vive dopo un certo tempo essendo nulla, vuol dire appunto che il lavoro motore fu pari a quello delle resistenze.

Queste conseguenze si possono compendiare nel così detto *principio delle forze vive*, vale a dire che *la potenza viva acquistata o perduta da un corpo in movimento è eguale al lavoro motore o resistente prodotto nel corpo stesso nel tempo considerato.*

Chiamando F lo sforzo locale esercitato, s lo spazio percorso, M la massa in movimento, V_0 la sua velocità al principio e v la velocità stessa alla fine di questo spazio, sarà dunque

$$Fs = \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} Mv_0^2$$

e quando fosse nulla la velocità v_0 sarebbe

$$Fs = \frac{1}{2} Mv^2.$$

Se qui osserviamo che $s = \frac{1}{2} vt$ (essendo il moto uniformemente accelerato e nulla la velocità iniziale), noi potremo scrivere l'equazione sopra trovata

$$F \times \frac{1}{2} vt = \frac{1}{2} Mv \times v$$

e trascurando i fattori comuni

$$Ft = Mv.$$

Il prodotto Ft dello sforzo locale per il tempo in cui la sua azione si è esercitata si chiama l'*impulsione della forza* ed il

prodotto Mv della massa per la velocità acquistata dalla medesima si chiama *quantità di movimento*. Con ciò l'equazione trovata si potrebbe enunciare dicendo che la quantità di movimento è eguale all'impulsione della forza. Questo principio contenuto in quello generale delle forze vive può venir utile in molti casi ¹.

¹ Lo stesso principio potrebbe dimostrarsi anche direttamente. Infatti noi abbiamo visto che quando una forza agisce sopra un corpo producendovi una pressione F , essa dà luogo nel corpo stesso ad una accelerazione di velocità, la quale dipende dalla massa del medesimo. Ritenendo costante la pressione esercitata noi avremo precisamente che le accelerazioni di velocità prodotte saranno inversamente proporzionali alle masse, dimodochè chiamando M, M' due valori della massa del corpo; φ, φ' , le corrispondenti accelerazioni di velocità si avrà

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{M'}{M},$$

ossia

$$M\varphi = M'\varphi' = F.$$

Supponendo che la forza abbia agito per un certo tempo t le velocità, che sarebbero acquistate dalle due masse M, M' sono rispettivamente $v = \varphi t$ e $v' = \varphi' t$; dimodochè si avrebbe $Mv = M'v' = Ft$.

CAPITOLO QUINTO.

ESPRESSIONE GRAFICA DEI MOVIMENTI. APPLICAZIONI.

Le equazioni che abbiamo trovate e che rappresentano le leggi dei movimenti uniformi ed uniformemente vari sono semplicissime, e la risoluzione delle medesime è alla portata di chiunque abbia appena le cognizioni più elementari dell'algebra. Nondimeno in alcuni casi si può trovare vantaggioso il saper trattare la questione graficamente invece che coi numeri. Il graficismo è vero che per sua natura non dà mai l'esattezza, ma in compenso esso dà spesso un'idea assai più chiara della questione, e talora è anche assai più spedito, evitando la noia delle operazioni aritmetiche.

Noi rappresenteremo graficamente i movimenti mediante linee riferite a due assi perpendicolari, in modo che per ciaschedun punto della linea l'*ascissa*, ossia la x (distanza del punto dall'asse verticale), rappresenti il tempo, mentre l'*ordinata* od y (distanza dall'asse orizzontale) rappresenti lo spazio percorso.

Ciò posto, ecco come rappresenteremo il moto uniforme:

Sia la retta indefinita OT (fig. 2.^a) l'asse che chiameremo delle x e sul quale, come già abbiamo detto, prenderemo i tempi, cioè delle porzioni proporzionali ai medesimi. La retta pure indefinita os sarà l'asse delle y , parallelamente al quale misureremo gli spazi. Ora, supponiamo che un corpo si muova di moto uniforme e che noi incominciamo a contare lo spazio

da esso percorso nello stesso momento in cui incominciamo a contare il tempo. Allora per quell'istante avremo: spazio percorso $= 0$; tempo trascorso $= 0$, il che vuol dire che il punto il quale rappresenterà il movimento in quell'istante sarà il punto O . Dopo una unità di tempo lo spazio percorso dal corpo essendo v , il punto della linea che rappresenta il movimento in quest'istante si troverà portando sulla OT una parte $O1=1$ e, sulla perpendicolare ad OT , da 1 prendendo $1M=v$. Trovato il punto M , se noi conduciamo la $OM \dots$, questa rappresenterà il movimento del corpo dato, poichè per una proprietà nota in geometria, se noi prendiamo un punto qualunque N sulla retta stessa, noi avremo

$$Nx = \frac{M1}{O1} Ox = M1 \times Ox = vt.$$

Col mezzo di questa figura si possono risolvere tutte le questioni relative al moto dato. Così, se si cerca lo spazio percorso in un dato tempo, non si ha che a portare sopra OT una parte Ox eguale a questo tempo (nella stessa scala con cui si è preso $O1=1$), e la perpendicolare xN rappresenterà lo spazio richiesto. Se invece si volesse il tempo richiesto per percorrere un dato spazio, si prenderebbe questo spazio sopra OS : dal punto y così trovato si condurrebbe la parallela ad OT fino ad incontrare la retta del movimento in N , e la yN rappresenterebbe il tempo. Finalmente se, dato lo spazio qualunque Nx ed il tempo Ox , si volesse trovare la velocità, basterebbe costruire con questi dati la retta ON ; indi, preso $O1=1$, condurre la $M1$, che rappresenterebbe la velocità.

La costruzione grafica accennata può tornare molto utile per risolvere alcuni problemi relativi al movimento simultaneo di più corpi. Eccone qualche esempio:

1.° Due corpi partono contemporaneamente da due punti distanti fra loro di metri 30, e vengono l'uno contro l'altro con

velocità l'uno di 2^m , l'altro di $2^m,5$: si domanda in qual punto si incontreranno e dopo quanto tempo?

Per risolvere graficamente questo problema si costruisca, nel modo indicato sopra, la $OA \dots$ (fig. 3.^a) che rappresenti il movimento del 1.^o corpo. Indi si porti sull'asse degli spazj una parte $OO' = 30^m$ e da O' si costruisca la retta $O'B$, che rappresenti il moto del 2.^o corpo, avvertendo che la velocità di questo corpo è negativa per rispetto a quella del primo, e che perciò la retta che la rappresenta deve essere presa in senso opposto. Prolungate le due rette quanto occorre, si avrà nel loro incontro M il punto che corrisponde all'incontro dei corpi, dimodochè sarà MP la distanza di questo punto d'incontro dal punto di partenza del primo corpo ed OP il tempo decorso, con che viene risolto il problema. Come si vede, la risoluzione ora indicata è della più grande semplicità, mentre la risoluzione numerica dello stesso problema esige una certa abitudine all'algebra, ed, a pari circostanze, richiede maggior tempo.

2.^o Un corpo parte da un certo punto con una velocità di 3^m : dopo 10 secondi un altro corpo parte nella stessa direzione, ma da un punto che è più indietro del punto di partenza del primo di metri 15 e colla velocità di 5^m . Si domanda dove e quando si incontreranno? (fig. 4.^a)

Al modo indicato si costruisca la retta OA che rappresenti il movimento del 1.^o corpo. Poi si prenda $Oa = 10''$ ed $aO' = 15^m$ (al disotto perchè si è detto che il punto di partenza del 2.^o corpo è più indietro di quello del 1.^o, quindi i 15^m sono negativi). Trovato così il punto O' si costruisca la $O'B$ e si otterrà, come nel problema precedente, in OP il tempo trascorso dalla partenza del 1.^o corpo al momento in cui i due corpi si incontrano, ed in MP la distanza di questo punto d'incontro dal punto di partenza pure del 1.^o corpo.

La difficoltà che si può incontrare nel risolvere graficamente questo problema consiste nella possibilità che le due rette OA ,

$O'B$ si abbiano ad incontrare fuori del foglio di carta. Per evitare questo caso basta spesso la pratica dell'operatore, il quale sa prendere una scala conveniente a seconda del bisogno. Del resto giova osservare che, occorrendo, non è necessario prendere la stessa scala per i tempi, come per gli spazi, purchè non si dimentichi poi di misurare gli spazi ed i tempi risultati colle loro scale relative. Con questi riflessi l'accennato inconveniente potrà sempre essere evitato.

3.º Da una stazione A parte un convoglio ferroviario diretto verso la stazione B colla velocità di metri 10. Da una stazione intermedia C distante da A di chilometri 6,5 deve partire un altro treno pure verso B , ma colla velocità di metri 7.00. La distanza fra A e B è di chilometri 12. Si domanda dopo quanto tempo dovrà partire quest'ultimo treno onde arrivare in B cinque minuti prima del treno proveniente da A ? (fig. 5.^a)

Si costruisca la retta $OA \dots$ che rappresenti il moto del primo convoglio; poi sopra l'asse degli spazi si porti una parte $OH = 12$ chilometri ed un'altra parte $Oh = \text{chil. } 6,5$ e da questi punti si conducano le parallele ad OT . Ora si costruisca, partendo, per esempio, da O , una retta Ox rappresentante il movimento del secondo convoglio, astrazione fatta per ora della posizione assoluta del suo punto di partenza. Allora dal punto M si prenda verso H la $MN = 5'$ e da N si conduca la parallela alla retta Ox , la quale incontrerà l'orizzontale condotta per h nel punto L . La $LN \dots$ sarà evidentemente la retta che rappresenta il movimento del secondo convoglio, e in hL avremo il tempo richiesto, in modo che il secondo convoglio, partendo dalla stazione C di un tempo hL dopo la partenza del primo convoglio da A , venga ad arrivare in B cinque minuti prima dell'altro.

A proposito di questo problema faremo osservare che, nel costruire la retta rappresentante il movimento mediante la velocità data, si verrebbe spesso a determinare la retta stessa

mediante due punti vicinissimi, il che è da evitarsi sempre in disegno. Per togliere questo inconveniente basta osservare che non è per nulla necessario prendere realmente una unità sull'asse dei tempi e il relativo spazio sulla perpendicolare, ma che si possono invece prendere 10, 100, ecc. unità di tempo, purché sulla perpendicolare si prenda lo spazio pure 10, 100, ecc. volte tanto. Così per costruire la retta del movimento del primo convoglio noi potremo prendere sull'asse OT una parte eguale a 1000 secondi, prendendo poi sulla perpendicolare 10 chilometri invece di 10 metri, ed analogamente per l'altro convoglio. In conclusione, si farà sempre in modo che il punto determinante la retta del movimento riesca il più lontano possibile dall'origine della medesima, con che la retta stessa riuscirà sempre più esatta.

Veniamo ora al moto uniformemente accelerato. In questo movimento si è visto che lo spazio percorso è proporzionale al quadrato del tempo impiegato; gli spazi dunque crescono assai più rapidamente che non i tempi, e perciò, se noi rappresentiamo questo moto con una linea come abbiamo fatto col moto uniforme, troveremo che quella linea non può essere una retta, ma che andrà piegando verso l'asse degli spazi. Quella linea è infatti una parabola, curva che ha moltissime proprietà interessanti e che si ottiene segnando una superficie conica ordinaria con un piano parallelo ad una generatrice.

Per descrivere la parabola si hanno in disegno varie regole: per il caso nostro ci basterà osservare che per un punto qualunque M di essa si dovrà avere

$$MP = \frac{1}{2} OP^2,$$

ossia

$$OP^2 = \frac{2}{\varphi} MP,$$

il che vuol dire che OP deve essere media proporzionale fra $\frac{2}{\varphi}$ ed $\overline{MP}$.

Ora supponiamo che Oa sia eguale a $\frac{2}{\varphi}$ ed $\overline{OM'} = \overline{MP}$, si dovrà avere a PM' rettangolo in P , essendo in tal caso appunto OP media proporzionale fra i due segmenti dell'ipotenusa. Dunque, dato un tempo OP , per trovare lo spazio corrispondente basta prendere $Oa = \frac{2}{\varphi}$, unire a con P e da P condurre la perpendicolare ad aP fino ad incontrare l'asse OS ; si otterrà così il punto M' e quindi

$$OM' = MP = s.$$

È evidente poi che, variando i valori di OP e ripetendo la stessa costruzione, si avranno facilmente quanti punti occorrono per disegnare la linea o quell'arco di linea che occorre. La parte fissa $Oa = \frac{2}{\varphi}$ può essere trovata facilmente, osservando che per $OP = 1$ si deve avere

$$MP = s = \frac{1}{2}\varphi.$$

Ora, trovato così un punto M della linea, lo si proietterebbe in M' sopra OS ; indi, supponendo condotta la $M'P$, si condurrebbe da P la perpendicolare Pa ad $M'P$ e si otterrebbe con ciò il punto a . Bisognerà però qui ripetere che, se la scala del disegno è piccola, non converrà prendere $OP = 1$ per determinare il punto M della curva e con esso il punto fisso a , per la ragione che i lati MP e Pa essendo molto piccoli e la direzione di PA in conseguenza molto convergente con quella dell'asse OS , la posizione del punto a ne verrebbe assai incerta. In tal caso si potrà prendere $OP = 10$, prendendo allora $MP = 100 \times \frac{1}{\varphi}$, o meglio ancora $OP = 100$ e $MP = 10000 \times \frac{1}{\varphi}$, ecc.

Osserveremo poi ancora che, siccome per la natura di questo movimento gli spazi vanno crescendo molto rapidamente, così sarà in generale necessario assumere per rappresentare gli spazi una scala molto più piccola di quella scelta per i tempi. È necessario però in tal caso osservare che se l'unità per i tempi è m volte quella degli spazi, la quantità costante $\frac{2}{\varphi}$ dovrà essere presa con un'unità eguale a m^3 volte quella degli spazi stessi.

La costruzione grafica che ora abbiamo accennata si può applicare alla risoluzione di problemi analoghi a quelli già indicati a proposito del moto uniforme. Il modo di operare in simili casi sarebbe affatto identico a quello che abbiamo descritto; l'unica differenza consistendo in ciò che, in luogo di una retta, bisognerebbe qui disegnare una parabola. Perciò crediamo di poterci dispensare dal darne esempi appositi. Accenneremo piuttosto un caso che potrebbe talora occorrere, ed è quello in cui il corpo abbia dapprincipio un moto uniformemente accelerato, ed, arrivato ad un certo istante, continui il suo moto conservando la velocità acquistata in quell'istante. Sarebbe questo il caso di tutti i corpi che si mettono in moto sotto l'azione di una forza motrice; se non che in pratica ordinariamente l'azione della forza motrice venendo a poco alla volta assorbita dalle resistenze, ne deriva che l'accelerazione di velocità, che ha luogo nel primo periodo del movimento, non è costante, ma va decrescendo fino a ridursi a zero. Nondimeno, ritenendo che l'accelerazione di velocità conservi per tutto il periodo del moto accelerato il suo valore medio, noi potremo ridurre il problema al caso sopra accennato. Ora, per rappresentare graficamente questo movimento misto basta trovare la curva parabolica fino all'incontro della normale MP (fig. 7.^a) condotta pel punto P , che corrisponde all'istante in cui cessa il moto accelerato. In M poi bisognerà condurre la tangente alla curva, e questa rappresenterà il moto uniforme che avverrà in seguito. Per condurre questa tangente

basterà portare la lunghezza PM da O in N e la NM sarà la tangente richiesta.¹ Evidentemente, qualora non occorra considerare il movimento fra O e P , l'arco OM di parabola può essere ommesso, costruendo semplicemente il punto M e la MN . — Fin qui abbiamo supposto che il corpo non avesse velocità al principio del moto che si considera; nel caso in cui vi fosse una velocità iniziale, dovendo essere

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

vuol dire che le ordinate rappresentanti gli spazi totali dovranno essere contate non già dall'asse OT , ma da una retta $s = v_0 t$, tracciata da O al disotto della OT (fig. 6.*), in modo che ciascuna ordinata MQ sarà appunto eguale a

$$PQ + PM = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

Ci resta per ultimo a considerare il moto uniformemente ritardato. In esso noi abbiamo

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

il che vuol dire che le ordinate rappresentanti lo spazio percorso si dovranno ottenere come nel caso precedente, misurandone cioè la parte compresa fra la curva parabolica e la retta rappresentante $s = v_0 t$. Solo qui quelle ordinate dovranno risultare dalla differenza fra le porzioni PQ e MP , per il che è necessario che la retta e la curva siano volte da una stessa parte, il che otterremo tracciando la retta OQ come nella fig. 8.*; nella quale MQ rappresenterà lo spazio percorso dopo il tempo OP . Dall'esame di questa figura noi troviamo che gli spazi percorsi crescono fino ad un certo punto col crescere del tempo, poi diminuiscono finchè pel punto A lo spazio percorso si ridurrebbe

¹ Per una proprietà della parabola si ha che la *sottotangente* è doppia dell'ascissa corrispondente al punto di tangenza.

a zero, e che da A in avanti gli spazi stessi tornano a crescere, ma sono negativi; poichè, contandoli sempre da un punto della curva al punto corrispondente della retta, essi riescono volti in senso contrario dei precedenti. Tutto ciò deve infatti avvenire ogni volta che il movimento viene ritardato da una causa capace essa stessa di produrre un movimento in senso contrario, come avviene, per esempio, pei gravi lanciati in alto verticalmente, pei quali la gravità agisce come forza ritardante finchè il grave sale, ma agisce poi come forza accelerante appena che il grave discende. In simili casi avviene appunto che il corpo dapprima muovendosi sempre in una direzione, viene a generare spazi crescenti (contati, ben inteso, dall'origine). Ma quando la sua velocità si è estinta, il moto incomincia in senso opposto, ed il corpo, dopo un tempo precisamente eguale a quello che ha impiegato per arrivare al punto in cui cessò il primo movimento, viene a ritornare al punto di partenza. Ecco perchè in questo secondo periodo gli spazi, contati sempre dal punto di partenza, decrescono finchè si riducono a zero. Da quel punto poi il movimento continuerebbe retrogrado con velocità sempre crescente, in grazia della prevalenza dell'azione, che prima era ritardatrice, e che ora è divenuta acceleratrice; gli spazi dunque sono sempre crescenti, ma negativi, come lo mostra la figura. Tutto ciò però non avviene quando la causa che ritarda il movimento non è una causa motrice, ma una resistenza passiva, nel qual caso ogni movimento si arresta quando è estinta la velocità del corpo. Lo spazio totale percorso sarà dato; in tal caso, dalla figura nell'ordinata DF , corrispondente al punto C di mezzo fra O e B , ed OC rappresenterà la durata totale del movimento.

CAPITOLO SESTO.

AZIONE SIMULTANEA DI PIÙ FORZE O MOVIMENTI SOPRA UNO STESSO CORPO. CENTRI DI GRAVITA'.

Noi abbiamo studiato nei capitoli precedenti le leggi dei movimenti elementari che possono aver luogo in un corpo in seguito all'azione di una forza o tutt' al più in seguito all'azione di varie forze (motrici o resistenti) dirette però tutte secondo una stessa retta ed agenti sopra uno stesso punto del corpo. Ora in pratica avviene spesso che varie forze in direzioni ¹ differenti agiscano o sopra uno stesso punto di un corpo o sopra punti diversi del medesimo.

Talvolta avviene che una forza producendo una pressione costante eserciti la propria azione sopra un punto di un corpo che trovasi già animato da una certa velocità.

In tutti questi casi occorre al meccanico di determinare quale sarà l'effetto risultante e di paragonare quest'effetto a quello di una forza o pressione unica della quale si tratta di determinare la grandezza e la direzione.

Per risolvere questi problemi noi ci serviremo quasi esclusivamente del graficismo, il quale in simili casi è assai più spe-

¹ Per direzione di una forza si intende la direzione del movimento che essa tende a produrre: per le azioni semplicemente resistenti questa direzione è sempre opposta a quella del movimento che ha luogo.

dito e più facile. Per incominciare poi dal caso più semplice noi supporremo che dappprincipio le varie azioni abbiano luogo sopra uno stesso punto.

Si abbia adunque un punto A (fig. 9.*) sul quale agiscano contemporaneamente due forze motrici capaci, la prima di far muovere il punto A nella direzione As facendogli percorrere, per esempio, uno spazio As nel 1.^o minuto secondo; l'altra di far percorrere allo stesso punto A pure nel 1.^o minuto secondo uno spazio As' . Si tratta di trovare quale sarà l'effetto risultante da queste due azioni sul detto punto A . Intanto sarà evidente che il movimento del punto A non avrà luogo nè secondo As , nè secondo As' , ma in una direzione intermedia: è facile inoltre comprendere che, se l'azione As è prevalente su quella As' , la direzione del movimento risultante sarà più verso As che verso As' e viceversa, e che finalmente, se le due azioni fossero eguali, la direzione risultante dovrebbe essere equidistante dalle due, ossia essere la bisettrice dell'angolo sAs' . Ora aggiungiamo che le due forze dovranno esercitare la loro azione indipendentemente l'una dall'altra e che perciò il punto A alla fine di ciascun istante dovrà trovarsi in un punto la cui posizione dipende dall'azione combinata delle due forze e che sarebbe lo stesso se le due forze invece di agire simultaneamente avessero agito l'una dopo l'altra per un egual tempo. Così se Ab rappresenta lo spazio che in un'istante indefinitamente piccolo il punto A percorrerebbe sotto l'azione della forza As , e $Ac = bc'$ lo spazio analogo per la forza As' , quando le due forze agissero separatamente il punto A percorrerebbe gli spazi $Ab + bc'$, ed agendo le due forze simultaneamente il punto A dovrà pure alla fine di quell'istante arrivare in c' , punto evidentemente della diagonale AR del parallelogrammo $AsRs'$. Così si dimostrerebbe che, alla fine di ciascuno dei successivi istanti indefinitamente piccoli componenti il minuto secondo, il punto A dovrà trovarsi in punti di questa diagonale e, se poi

consideriamo che, quegli istanti essendo indefinitamente piccoli, i successivi punti d'arrivo sulla diagonale saranno indefinitamente vicini, possiamo concludere che il punto A percorrerà la diagonale AR trovandosi alla fine del minuto secondo in R . Del resto questo fatto può riuscire forse ancora più evidente osservando che l'azione della forza As' consisterà nel deviare continuamente il punto A dalla direzione As' di quantità eguale agli spazi che essa stessa farebbe percorrere al medesimo punto A ; dimodochè alla fine del minuto secondo essa l'avrebbe deviato di una quantità sR eguale appunto allo spazio As' . Concluderemo adunque col dire che l'azione simultanea delle due forze As , As' produce sul punto A lo stesso risultato che l'azione di una forza unica capace di far percorrere al punto A nel 1.^o minuto secondo uno spazio AR determinato dalla diagonale del parallelogrammo costruito sulle due rette As , As' . Siccome poi le forze agendo sopra uno stesso punto sono proporzionali alle accelerazioni di velocità prodotte, ossia agli spazi percorsi nella prima unità di tempo, così le rette As , As' potendo rappresentare le forze motrici agenti sul punto A , la AR ne rappresenterà la risultante. Così pure, osservando che le pressioni esercitate sopra uno stesso punto sono proporzionali ancora alle accelerazioni di velocità, oppure agli spazi percorsi nella prima unità di tempo, ne verrà che se As , As' rappresenteranno le pressioni dovute alle forze date, AR rappresenterà la pressione risultante. Finalmente, se le stesse rette As , As' rappresentassero due velocità dalle quali fosse contemporaneamente animato il punto A , AR rappresenterebbe la velocità risultante.

In conclusione, sia che si tratti di forze, di pressioni, di velocità, la risultante è sempre rappresentata dalla diagonale del parallelogrammo costruito sulle componenti. Anzi potremo aggiungere che in pratica non sarà nemmeno necessario costruire il parallelogrammo, essendo sufficiente il triangolo SAR , nel quale due lati

consecutivi rappresentano le componenti (forze, pressioni, velocità) in grandezza e in direzione: il terzo lato rappresenterebbe la risultante volta però in senso opposto, poichè, partendo dal punto A e percorrendo il perimetro del triangolo ASR , noi troveremmo i lati AS , SR ed RA in luogo di AR . — Il triangolo ASR , che chiameremo d'ora innanzi il triangolo o più in generale il poligono delle forze può servire anche per risolvere il problema inverso di quello ora indicato, quando cioè si tratti di sostituire ad una forza data due forze, le quali agiscano in date direzioni, o delle quali sia data la grandezza, oppure sia data la grandezza e la direzione di una, ecc. Tutti questi problemi si riducono graficamente alla costruzione del triangolo delle forze, essendone dati un lato e le direzioni o le grandezze degli altri due od altri elementi che equivalgano. È inutile qui l'esaminare quando questi problemi di decomposizione siano o no possibili: basterà il dire che essi saranno possibili ogni volta che sarà possibile la costruzione del triangolo indicato.

Col metodo che abbiamo accennato e cogli stessi ragionamenti si troverebbe la risultante di un numero qualunque di forze agenti sullo stesso punto, purchè però tutte queste forze siano in uno stesso piano: nel caso contrario bisognerebbe trovare le risultanti parziali di tutte quelle che si trovano in uno stesso piano, indi comporre nuovamente queste risultanti. Siano dunque le forze s, s', s'', s''' (fig. 10.^a) tutte in un piano ed applicate al punto A . Per trovarne la risultante si incominci a condurre la sa parallela ed eguale ad As' : allora la Aa rappresenterà la risultante delle s ed s' . Se ora da a conduciamo la ab eguale e parallela ad As'' avremo in Ab la risultante delle forze s, s', s'' . Finalmente conducendo la bc eguale e parallela ad As''' si avrà in Ac la risultante richiesta. Naturalmente le rette Aa, Ab diventano inutili ed allora il poligono $Asabc$ è quello che abbiamo già convenuto di denominare il *poligono delle forze* in cui l'ultimo lato cA rappresenta la risultante delle forze volta però in senso opposto.

Anche qui il problema della decomposizione di una o più forze date in altre è la questione del costruire il relativo poligono, problema più spettante alla geometria che alla meccanica. Ci fermeremo piuttosto ad un caso che potrebbe occorrere nella costruzione del poligono delle forze onde trovare la risultante di un numero qualunque di forze date, ed è quello in cui il punto c venisse a cadere in A , dimodochè il lato cA riuscisse nullo. In tal caso vorrebbe dire che la risultante delle forze date è eguale a zero. Ora, siccome la risultante è una forza il cui effetto equivale a quello delle date prese insieme, l'essere questa risultante eguale a zero dimostra che tutte le forze date prese insieme non producono alcun effetto.

Questo fatto si esprime col dire che le forze date si fanno *equilibrio*. Egli è ciò che avviene in pratica di tutte le parti di sostegno delle macchine, di tutte le parti componenti le armature dei tetti, ecc., le quali, benchè sottoposte a varie azioni tendenti a muoverle in varie direzioni, pure restano a loro posto. Tutto ciò forma l'oggetto della *statica*, applicazione importante della meccanica, che ha appunto per oggetto di studiare le condizioni necessarie, poichè un dato corpo si mantenga in equilibrio. — Si osservi però che onde un corpo sia in equilibrio non è necessario che esso non abbia movimento, ma basta che il suo moto non venga influenzato dalle forze agenti sul medesimo: in altri termini, l'equilibrio può aver luogo tanto quando il corpo resta in quiete, come quando abbia un moto uniforme. Ordinariamente l'equilibrio nel primo caso si chiama *statico*, e nel secondo caso si dice *dinamico*. Del resto tanto nell'un caso come nell'altro¹ la condizione grafica perchè avvenga l'equilibrio nelle forze applicate ad un punto, è come

¹ L'essere il punto che si considera in quiete o in moto è una circostanza affatto estranea al problema: solo possono variare nei due casi le forze da considerarsi.

già abbiamo visto, che il poligono fatto colle forze date risulti chiuso.

Passiamo ora a considerare le forze applicate a varj punti di un corpo qualsiasi. Un corpo, come già l'abbiamo accennato, è un sistema di punti materiali la cui posizione reciproca dipende dalle varie forze che agiscono su di essi. È evidente allora che, se noi esercitiamo sopra un punto di un corpo uno sforzo esterno, questo ne deve necessariamente alterare la posizione, ed in seguito a ciò verrà alterata la posizione anche degli altri punti del sistema che sono con esso legati dalle reciproche azioni. Ogni corpo dunque si deforma sotto l'azione di uno sforzo esterno qualsiasi. Noi però complicheremmo d'assai le nostre teorie, se volessimo tener conto di queste deformazioni, ed è perciò che nella meccanica usuale si usa considerare i corpi come *rigidi*, cioè *non deformabili*, il che può in pratica ritenersi prossimamente vero finchè le forze esterne applicate al corpo siano abbastanza piccole relativamente alle azioni interne che ne tengono connesse le particelle.

Fatta questa ipotesi ne derivano due conseguenze, che cioè:

1.° Uno sforzo (pressione o tensione) sopra un corpo si può intendere applicato in un punto qualunque della sua direzione.

2.° Che due sforzi eguali e direttamente opposti *si distruggono*, cioè non possono comunicare al corpo alcun movimento.

Ciò posto, incominciamo ad esaminare il caso più semplice in cui non si abbiano che due sforzi qualunque applicati a due punti di un corpo. Siano (fig. 11.°) A e B i due punti, Af , Bf' i due sforzi ed AB la retta qualunque che unisce i punti stessi. Supposto che le direzioni dei due sforzi non siano parallele, si prolunghino fino al loro incontro in O . Allora, in virtù del principio sopra annesso, noi potremo supporre ambedue gli sforzi come applicati in O , sia poi o non sia questo punto contenuto nel corpo. Con ciò il problema viene ricondotto al caso

precedente; dimodochè troveremo col mezzo del triangolo delle forze la direzione e grandezza dello sforzo risultante, la quale, trasportata in O e prolungata di quanto occorre perchè essa venga ad incontrare la AB , darà in C il punto sulla AB stessa, nel quale questo sforzo risultante potrà intendersi applicato. Il triangolo $a12$ rappresenta appunto il triangolo delle forze, essendo $a1$ eguale e parallela ad Af ; 12 eguale e parallela a Bf' ; $a2$ rappresenta la risultante alla quale la OR deve essere parallela. A questo modo si risolve facilmente il problema proposto. Noi però lo risolveremo ora di nuovo partendo da altre considerazioni, dalle quali potremo desumere un metodo più generale che ci servirà poi per problemi anche più complicati. Invece di cercare lo sforzo risultante di due dati proponiamoci di trovare quello sforzo, che, applicato al corpo in una posizione conveniente, mantenga il corpo stesso in equilibrio. Questo sforzo sarà ancora il risultante dei due dati, ma solo volto in senso opposto. Ora, consideriamo nuovamente il corpo AB cogli sforzi f ed f' : questi sforzi, essendo per esempio disposti come nella figura, genereranno una tensione lungo AB ; poichè quegli sforzi suppongono due forze motrici, le quali tenderebbero ad allontanare i punti A, B ; e se questi punti non si allontanano (non affatto ammettendo l'ipotesi dei corpi rigidi), ciò avviene in conseguenza della tenacità della materia componente il corpo, per la quale si svilupperà fra A e B una tensione capace di impedire l'allontanamento indicato.

Se ora (fig. 12.*) supponiamo che in un certo punto D (preso fuori dalla retta AB per rendere più chiaro il ragionamento) sia applicata la terza forza, che cerchiamo, fra D ed A e fra D e B si svilupperanno pure analoghe tensioni o compressioni a seconda dei casi. Queste tensioni e compressioni che si sviluppano nell'interno dei corpi non sono facilmente riconoscibili finchè si tratta di corpi rigidi, ma vi è un mezzo di renderle evidenti, ed è quello di sostituire all'intera massa del

corpo delle funi o delle aste articolate (le funi per le tensioni, le aste per le compressioni) nelle direzioni in cui avverrebbero le tensioni o le compressioni accennate. Ne deriverà allora che la forma che prenderanno questi poligoni funicolari ed articolati sarà una conseguenza dei varj sforzi sia esterni che interni applicati ai varj punti che si considerano. In grazia dell'assoluta mobilità supposta nei vertici di questi poligoni, qualunque variazione prodotta in uno degli sforzi che vi agiscono darà luogo ad un movimento e quindi ad una deformazione del poligono. Ora, dati gli sforzi che hanno luogo nei varj punti del corpo e date le direzioni e posizioni dei medesimi, si può sempre trovare un poligono articolato capace di sostituire, come si è detto, le reazioni interne che avrebbero luogo nel corpo. A ciascun vertice di questo poligono sarebbe applicato uno sforzo esterno dato e due altri sforzi interni (pressioni o tensioni) nelle direzioni dei due lati che mettono capo a quel vertice. Se poi le forze date non si fanno equilibrio, allora rimarrà un vertice del poligono, al quale dovremo applicare lo sforzo determinato già dal poligono delle forze e capace di mettere in equilibrio il sistema. Onde assicurarci poi che il poligono tracciato e quindi il corpo sia realmente in equilibrio, bisognerà notare che, onde ciò si verifichi, è necessario che ogni vertice del poligono sia separatamente in equilibrio. Ora in ciascun vertice, abbiamo detto, si esercitano tre sforzi, uno dato esterno e due interni lungo i due lati contigui. Perché dunque il vertice considerato sia in equilibrio bisogna che le direzioni dei lati contigui e le grandezze delle reazioni, che avvengono lungo i medesimi, siano tali, che i tre sforzi già accennati che agiscono sul vertice, formino un triangolo. Questo fatto sarà appunto quello che ci guiderà nel tracciamento del poligono.

Premesse così le considerazioni generali veniamo a farne un' applicazione al problema, che già avevamo risolto. Si ab-

biano adunque (fig. 12.) i punti A e B e gli sforzi Af , Bf' e si cerchi la posizione in cui dovrà agire lo sforzo $2a$ necessario per mantenere il corpo in equilibrio. Non essendo date altre condizioni, i poligoni funicolari, che possono soddisfare, sono in numero indefinito. Noi perciò potremo fissare, per esempio, che uno dei lati debba essere la stessa AB e che un altro sia AD Allora, se consideriamo il 1.^o vertice A , sul quale agisce lo sforzo Af , la tensione lungo AB e la compressione lungo AD , noi potremo facilmente determinare queste azioni interne, dovendo il vertice A essere in equilibrio. In fatto, rappresentando la $a1$ lo sforzo Af , conducendo da a la parallela ad AD e da 1 la parallela ad AB , nel triangolo $aO1$ si avrà in aO la compressione che avverrà lungo AD e in $1O$ la tensione lungo AB . Ora il punto B in cui la AB incontra la direzione dello sforzo Bf sarà il 2.^o vertice del poligono, sul quale agiranno lo sforzo $Bf' = 1,2$, la tensione lungo AB già determinata in $1O$ e la compressione lungo l'altro lato la cui direzione va determinata. Ma perchè il vertice B sia in equilibrio bisogna che lo sforzo interno lungo il lato da determinarsi sia rappresentato da $O2$, ed in tal caso il lato incognito BD dovrà essere parallelo a $2O$. Ecco adunque che, conducendo da B la parallela a $2O$ fino ad incontrare la AD si otterrà il punto D terzo vertice del triangolo articolato, pel quale dovrà passare la direzione dello sforzo $2a$ onde il sistema sia in equilibrio. Sarà facile verificare graficamente che la posizione del terzo sforzo o del risultante così determinata coincide con quella determinata nella prima maniera.

Riassumendo adunque, noi vediamo che per determinare un poligono funicolare, il quale sia in equilibrio sotto l'azione degli sforzi esterni dati, oppure, onde trovare col mezzo del poligono funicolare la posizione dello sforzo risultante da due o più altri dati, la regola pratica è la seguente: disegnato il poligono delle forze $a12$ (fig. 13.), si prenda un punto O qua-

lunque (chiamato polo) e si conducano da esso i raggi Oa $O1$ $O2$; indi da un punto qualsiasi I della direzione di Af si conduca la parallela ad Oa indefinita e la parallela ad $O1$ fino ad incontrare la direzione della Bf' (eguale ad 1, 2 nel poligono delle forze), si avrà così il vertice II dal quale si condurrà la parallela ad $O2$ fino ad incontrare la parallela già condotta ad Oa e con ciò si otterrà il vertice III , pel quale passa lo sforzo risultante. Evidentemente il punto O è arbitrario finchè è arbitraria la forma del poligono articolato: esso verrebbe determinato quando fossero date o le direzioni di due lati del poligono o le grandezze di due delle reazioni interne od altre equivalenti condizioni sulle quali non ci fermiamo trattandosi di questione più geometrica che meccanica.

È facile capire che la costruzione ora descritta come i ragionamenti fatti sono applicabili per un numero qualunque di sforzi che agiscano in punti qualsiasi di un corpo, purchè gli sforzi stessi siano in un solo piano. La fig. 14.^a mostra abbastanza chiaramente il modo di procedere, supposto che gli sforzi dati siano quattro f' , f'' , f''' , f^{iv} , le cui grandezze e direzioni sono rappresentate nel poligono delle forze rispettivamente in $a1$; $1,2$; $2,3$; $3,4$. La $4a$ rappresenta il risultante degli sforzi dati, o meglio lo sforzo che bisognerebbe esercitare in una posizione conveniente per mantenere il sistema in equilibrio. Preso un polo qualunque O si è ottenuto al modo descritto il poligono I, II, III, IV, V il cui vertice V sarà un punto della direzione dello sforzo sopra accennato eguale a $4a$.

Facciamo ora alcune osservazioni sul poligono funicolare od articolato, che abbiamo descritto:

1.° Parlando al principio di questo capitolo delle forze applicate ad un punto, abbiamo dedotto una condizione grafica molto semplice perchè le forze date si facciano equilibrio, ed è che il poligono delle forze stesse sia chiuso. La stessa condizione però non basta quando si hanno varj sforzi che si eser-

citano in diversi punti di un sistema. In tal caso dobbiamo aggiungere alla condizione sopra accennata un'altra, ed è che il poligono funicolare sia pure chiuso. In fatti nella fig. 14.° noi abbiamo determinato per mezzo del poligono funicolare la posizione dello sforzo $1a$ capace di mantenere il sistema in equilibrio. Ma se noi esercitassimo questo sforzo in direzione parallela, che non passi per il vertice V , come sarebbe lungo xy , in tal caso l'equilibrio del corpo non sarebbe conservato. Ora noi avremmo pure che il lato IV, V del poligono andrebbe ad incontrare la direzione dello sforzo di cui si parla in x , mentre il lato I, V incontrerebbe la stessa direzione in y ed il poligono funicolare non sarebbe chiuso, ma lascerebbe l'interruzione xy . Quando adunque, avendosi varj sforzi che si esercitano in varj punti di un corpo, si vuol determinare se il corpo è in equilibrio, bisognerà prima di tutto disegnare il poligono delle forze, il quale dovrà riuscire chiuso, poi, disegnato un poligono funicolare colle regole date, gli ultimi due lati del medesimo dovranno incontrarsi sulla direzione dell'ultimo sforzo.

2.° Se in un poligono funicolare $I II III IV V VI$ (fig. 15.°) noi supponiamo tagliati due lati, per esempio, i lati I, VI e IV, V , e supponiamo che si mantenga in equilibrio il sistema esercitando in altro modo gli sforzi $T_{1,6}$ e $T_{4,5}$ che prima avevano luogo nei lati recisi, è evidente che, tanto per la metà di poligono rimasta a destra, come per quella a sinistra gli sforzi o tensioni $T_{1,6}$ e $T_{4,5}$ essendo capaci di tenere ciascun mezzo poligono in equilibrio, il loro risultante deve rappresentare lo sforzo risultante dagli sforzi esterni che si esercitano sui vertici di ciascun mezzo poligono, sforzo che viene rappresentato graficamente dalla retta $1a$ nel poligono delle forze, la quale rappresenta appunto lo sforzo risultante sia degli $1, 2$; $2, 3$; $3, 4$ come dei $4, 5$, $5, 6$. Ora questo sforzo risultante deve passare per M punto di concorso delle direzioni delle ten-

sioni $T_{1..4}$, $T_{4..5}$ come pure dei prolungamenti dei due lati recisi del poligono. Dunque MR eguale e parallela a $4a$ rappresenta nella sua posizione lo sforzo risultante di tutti gli sforzi esterni applicati al poligono da una parte, come anche dall'altra dei lati recisi, e la sua posizione viene determinata da ciò che la sua direzione passa per il punto d'incontro dei due lati del poligono che si considerano.

3.^o La stessa figura 15.^a mostra come col mezzo del poligono delle forze e del poligono funicolare si possa risolvere il problema inverso, di sostituire cioè ad uno sforzo dato due altri equivalenti. Supponiamo infatti che lo sforzo rappresentato nel poligono delle forze in $4a$ si voglia *decomporre* in due, le cui direzioni siano $a5..$ e $45....$. Noi troveremo immediatamente le grandezze di questi sforzi in $a5$ e 45 nello stesso poligono delle forze. Ciò posto, supponendo che sia dato o già costruito il poligono funicolare $I II III IV M$, si prenda un punto V sul lato $IV M$ e si conduca la $V A....$ parallela alla $4, 5$. Pel punto A poi in cui questa incontra la $M A....$ si conduca la $N VI....$ parallela a $3a$. Si avranno così i vertici V e VI per cui devono passare le direzioni degli sforzi $4, 5$ e $5a$. Il vertice V si è qui fissato ad arbitrio, ma potrebbe la sua posizione essere determinata da condizioni date.

Le teorie e le costruzioni grafiche da noi esposte, riferendosi al caso generale di più sforzi comunque diretti in un piano, si applicano senza alcuna variazione al caso speciale in cui gli sforzi dati abbiano direzioni parallele. Solo osserveremo che in questo caso il poligono delle forze si riduce ad una retta e che lo sforzo risultante è rappresentato sulla medesima da una lunghezza eguale alla somma algebrica delle lunghezze rappresentanti gli sforzi dati, cioè alla somma effettiva di quelli che operano in un senso, meno la somma di quelli che operano nel senso opposto. La fig. 16.^a indica abbastanza chiaramente senza bisogno di particolari spiegazioni la costruzione grafica, suppo-

sto che si cerchi lo sforzo risultante da più altri $f', f'', f''', f''', f', f'$ fra loro paralleli. In esso il poligono delle forze è rappresentato dalla retta $a5$, in cui si ha $a1 = f'; 1,2 = f'; 2,3 = f''; 3,4 = f''; 4,5 = f'$. La $6a$ rappresenta in grandezza e in direzione lo sforzo risultante, la cui direzione dovrà passare per il vertice VII del poligono funicolare determinato dall'incontro del lato $I VII$ parallelo ad Oa e $VI VII$ parallelo ad $O6$. La dimostrazione di tutto ciò non sarebbe che una ripetizione di ciò che abbiamo già detto, basandosi essa sul fatto che i tre sforzi operanti in ciascun vertice del poligono funicolare così costituito si fanno equilibrio, perchè rappresentati nel poligono delle forze dai tre lati di un triangolo.

Invece di cercare lo sforzo risultante potremmo cercare la grandezza delle due pressioni che, in conseguenza degli sforzi dati, verrebbero esercitate sopra due punti fissi dati. La costruzione grafica in questo caso non sarebbe affatto dissimile dalla precedente (fig. 17.^a). Solo qui resterebbe incognito nel poligono delle forze la direzione del raggio Ox , il quale segnerà appunto le grandezze delle $ax, x1$ rispettivamente eguali alle pressioni che avranno luogo in M e in N e la cui somma evidentemente deve essere eguale ad $a1$. Ora il raggio Ox si troverà conducendo da O la parallela al lato $I VI$ che chiude il poligono funicolare.

Benchè la soluzione generale che abbiamo descritta permetta di risolvere qualunque problema relativo agli sforzi paralleli, nondimeno sarà utile il fare alcune osservazioni relativamente al caso particolare in cui si abbiano due soli sforzi paralleli, sia nello stesso senso che in senso opposto.

Nella fig. 18.^a siano Af, Bf' i due sforzi dati rappresentati rispettivamente da $a1; 1,2$. Costrutto il poligono funicolare I, II, III si avrà in III un punto della direzione dello sforzo risultante $a2$, oppure dello sforzo $2a$, che stabilirebbe l'equili-

brio del sistema: ora, considerando i triangoli simili $I d III$ e $a 1 O$, noi dedurremo la proporzione

$$f' : d III = h : A C.$$

Analogamente dai triangoli $II d III$, $1 2 O$ si avrà

$$f'' : d III = h : B C.$$

Dividendo l'una per l'altra queste due proporzioni si otterrà

$$\frac{f'}{f''} = \frac{B C}{A C}.$$

da cui

$$f' \cdot A C = f'' \cdot B C.$$

Noi troviamo adunque che il punto C per cui passa lo sforzo risultante, divide la $A B$ in due parti inversamente proporzionali agli sforzi dati.

Questa conseguenza che noi abbiamo dedotta da considerazioni geometriche poteva anche essere desunta da un semplicissimo ragionamento. Infatti, se noi supponiamo che nel punto C , mediante, per esempio, una fune, sia esercitato uno sforzo $= 2 a$ onde tenere il corpo $A B$ in equilibrio, noi potremo supporre il punto C senza movimento. Ora, se per un momento consideriamo il solo sforzo $A f'$ applicato al corpo $A B$, vediamo che, il punto A tendendo a prendere un movimento lungo $A f'$ mentre il punto C rimane fermo, ne seguirebbe una rotazione del corpo intorno al punto C stesso. Dall'altra parte poi lo sforzo $B f''$ tenderebbe pure a far ruotare il corpo intorno a C , ma in senso opposto. Perchè dunque il corpo $A B$ rimanga in equilibrio bisogna che le azioni di questi due sforzi riguardo ai moti di rotazione ora accennati si distruggano, ossia che le azioni stesse, le quali sono qui in senso contrario, siano eguali. Ma il lavoro prodotto da una forza qualunque è eguale allo sforzo o pressione moltiplicato per lo spazio percorso. Inoltre, trattandosi

di un moto di rotazione è facile intendere che gli spazi contemporaneamente percorsi dai varj punti del corpo sono proporzionali alle distanze che hanno questi punti dall'asse di rotazione. Dunque in questo caso il lavoro prodotto dalla forza in A sarà proporzionale allo sforzo f' moltiplicato per AC , ed il lavoro contemporaneamente prodotto dalla forza in B sarà proporzionale allo sforzo f'' moltiplicato per BC . Questi due lavori dovendo essere eguali, onde il corpo rimanga in equilibrio, ne seguirà che $f' \times AC = f'' \times BC$, come già si era trovato. (Vedi Capitolo 7.º, pag. 42).

Coll'appoggio di questa relazione ora dimostrata è facile il trovare costruzioni grafiche molto semplici per determinare la posizione dello sforzo risultante di due sforzi dati paralleli. Siano in fatti Af' , Bf'' (fig. 19.ª) i due sforzi applicati in A e B . Si faccia $Bx = Af'$ ed $Ay = Bf''$ vólto in senso opposto e si conduca la xy : dove questa incontra la AB si avrà il punto C , pel quale passa lo sforzo risultante $= f' + f''$. Per dimostrarlo basta osservare che dai triangoli AyC , BxC si ha

$$Bx : Ay = Bc : Ac$$

ossia

$$f' : f'' = Bc : Ac.$$

Una costruzione analoga servirebbe per decomporre uno sforzo dato in due passanti per due punti dati. Sia CR (fig. 20.ª) lo sforzo dato; A e B i punti dati pei quali devono passare gli sforzi che vi si vogliono sostituire. Si conduca Ax parallela ed eguale a CR : si congiunga x con B e si avrà il punto y in modo che Cy rappresenterà lo sforzo da applicarsi in A e yR quello da applicarsi in B .

Supponiamo ora che siano dati due sforzi paralleli, ma vólto in senso opposto (fig. 21.ª). In tal caso è facile l'accorgersi che il punto C per cui passa lo sforzo risultante non può trovarsi

fra A e B . In fatti se esso fosse per esempio in C , rispetto a questo punto le forze in A e in B tenderebbero a far girare la AB nello stesso senso e quindi non potrebbero giammai distruggersi le loro azioni. Del resto dovendo essere

$$f' x A C = f'' B C,$$

si intenderà facilmente che il punto C dovrà trovarsi sul prolungamento di AB dalla parte dello sforzo maggiore. Quanto al modo di trovarlo basterà prendere Bx sul prolungamento di Bf'' ed eguale ad Af' : indi $Ay = Bf''$ e volto in senso opposto; condurre la $xy \dots$ ed all'incontro di questa con $BA \dots$ si avrà il punto C richiesto. Per la dimostrazione basta considerare i triangoli CAy e CBx da cui si ricava la solita proporzione. È quasi inutile poi l'aggiungere che lo sforzo risultante sarà in grandezza eguale alla differenza fra gli sforzi dati e sarà volto nel senso dello sforzo maggiore.

Volendosi finalmente decomporre uno sforzo CR dato (fig. 22.^a) in due passanti, per esempio, pei punti A e B e volti in senso opposto, si potrà portare CR da B in r ; condurre la Ar , indi la Cy parallela ad Ar e sarà allora Ax lo sforzo da applicarsi in Bf' e By lo sforzo in Af' .

Del resto non è difficile il trovare altre costruzioni grafiche, egualmente semplici, sia per risolvere gli stessi problemi, che abbiamo indicato, che per altri analoghi. Per ultimo faremo ancora una osservazione sul caso dei due sforzi paralleli e diretti in senso opposto (fig. 21.^a). Dalla semplice ispezione della figura noi possiamo vedere che il punto C determinato dall'incontro della $xy \dots$ colla $BA \dots$ verrà tanto più lontano quanto meno Ay sarà diverso da Bx , ossia quanto meno saranno differenti i valori dei due sforzi f' ed f'' . Che se questi fossero eguali, il punto C andrebbe ad una distanza infinita, ossia non esisterebbe più, mentre lo sforzo risultante, che deve essere eguale alla differenza dei dati, diverrebbe eguale a zero. Que-

sto risultato singolare viene da ciò, che noi abbiamo fin qui sempre supposto tacitamente che il moto, che le forze applicate al sistema tendevano a comunicare al medesimo, fosse un moto di traslazione: mentre in questo caso il sistema non prenderebbe alcun moto di traslazione, ma semplicemente un moto di rotazione.

Quando dunque si hanno due sforzi eguali e contrarj, ma non direttamente opposti, non è possibile sostituire ai medesimi uno sforzo unico. Essi costituiscono ciò che chiamasi dai meccanici una *coppia*.

Da quanto abbiamo ora esposto sulla teoria degli sforzi paralleli risulta che, fatta eccezione al caso ultimamente accennato, in cui gli sforzi dati costituiscono o si riducono ad una coppia, esiste sempre uno sforzo risultante che può essere sostituito a tutti gli altri dati. Sulla direzione di questo sforzo risultante noi potremmo dunque col pensiero supporre trasportati tutti gli sforzi dati, i quali, sommandosi, darebbero appunto lo sforzo risultante. Ma se ora noi supponiamo cambiata la direzione di tutti quegli sforzi, rimanendo per altro essi sempre paralleli, e troviamo nuovamente la posizione dello sforzo risultante, su questa nuova direzione del medesimo noi potremo del pari supporre trasportati tutti gli sforzi componenti. Ne viene allora per conseguenza che il punto d'incontro di queste due direzioni dello sforzo risultante può essere considerato come il punto d'applicazione dello sforzo stesso, punto intorno al quale il detto sforzo risultante non farebbe che ruotare quando si venisse a cambiare la direzione degli sforzi dati. Il punto così definito ha ricevuto il nome di *centro delle forze parallele*.

Un corpo, ritenuto come un insieme di punti pesanti, può considerarsi come un sistema di forze parallele, poichè, sebbene le direzioni dei pesi delle varie particelle convergano verso punti situati nella parte centrale della terra, nondimeno, attesa la grande distanza dei loro punti di convergenza per rispetto

alle dimensioni dei corpi che consideriamo, quelle direzioni si possono ritenere come parallele. In un corpo adunque noi potremo trovare un punto simile al centro delle forze parallele già definite, nel quale potremo considerare come condensata tutta la materia del corpo, almeno per quanto riguarda il suo peso. Questo punto chiamasi il *centro di gravità*. Esso potrà trovarsi, in base a quanto abbiamo detto sopra, quando si conoscano le posizioni del risultante dai pesi delle varie particelle del corpo, attribuendo a questi pesi due direzioni differenti per rispetto al corpo. Onde determinare in un corpo dato queste due posizioni del risultante, accenneremo due modi, l'uno empirico, l'altro geometrico. Il primo modo consiste nel sospendere il corpo dato mediante un filo, indi segnare in esso la direzione del filo stesso, direzione la quale coinciderà evidentemente colla posizione del risultante dai pesi delle varie particelle del corpo e sulla quale quindi dovrà trovarsi il centro di gravità del medesimo. Sospendendo poi nuovamente il corpo, rivolto in altro modo, si verrà nella stessa maniera a tracciare nel corpo stesso la nuova direzione della risultante, ed il punto nel quale le due direzioni tracciate si incontrano sarà il centro di gravità.

Il metodo geometrico invece consiste nel determinare le posizioni del risultante dei pesi delle varie parti del corpo, considerati questi pesi in due direzioni differenti per rispetto al corpo stesso, impiegando le costruzioni grafiche già dimostrate in generale per gli sforzi paralleli. Nell'applicare però questo metodo conviene decomporre il corpo in parti definite, delle quali si conosca il peso e la posizione del centro di gravità; sarà perciò necessario il trovare prima le posizioni dei centri di gravità per alcuni corpi o figure elementari, onde coll'appoggio di queste si possa poi determinare il centro di gravità nei corpi o nelle figure più complesse.

Per agevolare la ricerca degli ora accennati centri di gravità elementari noi premetteremo come fatti evidenti:

1.° Che il centro di gravità di una retta pesante omogenea trovasi nel suo punto di mezzo: potremo in pratica considerare come una retta un'asta la cui sezione sia così piccola, di fronte alla lunghezza, da potere essere trascurata.

2.° Che quando un corpo qualsiasi è simmetrico rispetto ad un piano, ad una retta o ad un punto, il centro di gravità del corpo trovasi in quel piano, su quella retta o in quel punto. Perciò tutti i corpi o le figure che hanno un centro geometrico, hanno il centro di gravità nel centro di figura.

Ciò posto, consideriamo i seguenti corpi:

1.° *Insieme di tre rette pesanti costituenti il contorno di un triangolo* (fig. 23.*).

Anzi tutto saranno a, b, c i centri di gravità dei tre lati, ed in essi potremo quindi supporre tre pesi rispettivamente proporzionali alle lunghezze BC, AC, AB . Determinato poi il punto g della risultante dei pesi in b e c si considerino i due pesi in g e in a , il primo proporzionale alla lunghezza $AB + AC$ ed il secondo alla lunghezza BC : il punto G della risultante di questi ultimi due pesi sarà il centro di gravità richiesto. Osservando che, per costruzione, si avrà:

$$cg : gb = AC : AB = ac : ab,$$

ne deriva che la Ag è bisettrice dell'angolo a nel triangolo abc (proprietà nota di geometria piana). Lo stesso potendosi poi dimostrare per la cg' , ne verrà per conseguenza che il centro di gravità G trovasi nel centro del circolo inscritto nel triangolo abc , che ha i vertici nei mezzi dei lati del triangolo dato.

2.° *Arco di circolo* (fig. 24.*).

Per evitare i calcoli ed i ragionamenti alquanto sottili che occorrerebbero per la dimostrazione, ci limitiamo a dichiarare che il centro di gravità di un arco di circolo pesante si trova sul raggio che passa pel suo mezzo, ad una distanza OG dal

centro eguale al raggio moltiplicato per il rapporto fra la lunghezza della corda e quella dell'arco $\left(OG = R x \frac{AB}{\widehat{ACB}} \right)$.

3.^o Superficie di un triangolo (fig. 25.^a).

Potendosi il triangolo dato considerare come formato da un numero indefinito di rette parallele, per esempio ad AC , le quali avrebbero i loro punti di mezzo sulla Bm (m punto di mezzo di AC), ne viene che il centro di gravità del triangolo dovrà trovarsi sopra questa retta. Parimenti esso dovrebbe trovarsi sopra l'altra mediana Am e perciò si troverà nel loro punto d'incontro G . Dai triangoli ABG , Gmn si ricaverà che

$$mG : GB :: mn : AB :: 1 : 2$$

e quindi che

$$mG = \frac{1}{2} mB$$

e

$$BG = \frac{2}{3} mB.$$

4.^o Settore circolare.

Potendosi il settore considerare come composto di un numero indefinito di triangoli aventi il loro vertice nel centro del settore, i centri di gravità di tutti questi triangoli, trovandosi tutti a $\frac{2}{3}$ dal sopradetto centro, costituiranno un arco concentrico a quello del settore ed avente per raggio $\frac{2}{3}$ del raggio del settore stesso. Potendosi poi il peso del settore supporre concentrato nel detto arco, ne verrà che il centro di gravità di quest'arco sarà pure quello del settore. Esso dunque si troverà sul raggio che divide il settore per metà ad una distanza dal centro eguale a due terzi del raggio moltiplicato per il rapporto fra la corda e l'arco.

5.^o Quadrato, rettangolo, rombo, parallelogrammo.

I centri di gravità di queste figure si trovano all'incontro delle loro diagonali.

6.° Trapezio (fig. 26.*).

Benchè il centro di gravità del trapezio, come di qualunque altro quadrilatero o poligono in genere, possa essere trovato scomponendolo in triangoli e supponendo ai centri di gravità dei triangoli stessi applicati dei pesi proporzionali alle aree dei medesimi, nondimeno accenneremo la seguente regola molto semplice :

Si conduca la mn che divide per metà le due basi: indi si prolunghi una delle basi AD di una quantità Ax eguale all'altra base e si prolunghi in senso opposto quest'altra base di una quantità Cy eguale alla prima base. Si congiungano gli estremi x, y , così ottenuti e nel punto G d'incontro della xy colla mn si avrà il centro di gravità del trapezio.

7.° Piramide.

Con un ragionamento affatto simile a quello già fatto pel triangolo si dimostrerebbe che il centro di gravità di una piramide triangolare si trova all'incontro delle rette che ne congiungono i vertici coi centri di gravità delle faccie opposte e si dimostrerebbe del pari che lo stesso centro di gravità trovasi sopra una di tali rette a $\frac{1}{4}$ della medesima partendo dal vertice o ad $\frac{1}{4}$ partendo dalla base. — La stessa regola vale per una piramide qualunque.

Conosciute le posizioni dei centri di gravità dei corpi o figure elementari ora accennate, si potrà applicare la regola già esposta per determinare il centro di gravità di un corpo o di una figura qualunque. Così, per esempio, se si volesse il centro di gravità del segmento di circolo, basterà osservare che esso risulta dalla differenza fra il settore ed il triangolo corrispondente. Trovato allora il centro di gravità g del settore (fig. 27.*) e quello g' del triangolo, applicando direttamente la regola esposta alla pag. 74, si faccia $g'x$ proporzionale all'area del settore e gy proporzionale all'area del triangolo. Si conduca la xy ed in G si avrà il centro di gravità richiesto. Per

maggiore precisione si potranno anche prendere le $g'x$, gy eguali ai doppi delle suddette aree.

Così, se fosse data la sezione di un ferro della forma presentata nella fig. 28., si potrebbe decomporre la figura data in tre rettangoli 1, 4, 5, due quadrati 2 e 2' e due settori 3 e 3', dei quali ultimi i pesi saranno da sottrarsi. Trovati i centri di gravità di queste figure ed osservando che la sezione presentata è simmetrica rispetto alla retta 1, 4, 5, si conducano per questi centri di gravità le perpendicolari a questa linea. Trovate poi le aree delle varie figure elementari si porterà nel solito poligono delle forze a 1 proporzionale all'area del rettangolo 1; 1, 2 proporzionale alla somma delle aree dei due quadrati; 2, 3 proporzionale alla somma delle aree dei settori, ecc. Costrutto quindi il poligono funicolare $I III III IV V VI$ e condotta la direzione $VI G$ della risultante, si avrà in G il centro di gravità richiesto.

Se la figura non fosse stata simmetrica, con questa prima operazione non si sarebbe che ottenuta una retta su cui troverebbesi il centro di gravità. Si sarebbe dovuto quindi fare un secondo poligono funicolare, attribuendo ai pesi un'altra direzione; trovata allora una nuova direzione della risultante, all'incontro di questa colla precedente si sarebbe finalmente trovato il centro richiesto.

CAPITOLO SETTIMO.

MOVIMENTI CURVILINEI. MOTO CIRCOLARE. MOMENTI DELLE FORZE.

Quando due o più forze esercitano la loro azione sopra un punto, noi abbiamo visto in qual modo si possa trovare la direzione del moto risultante, o più precisamente la posizione in cui il punto dato dovrà arrivare dopo un dato tempo, conoscendo gli spazi che le singole forze farebbero percorrere al punto nel tempo stesso. Noi allora abbiamo tacitamente supposto che il moto del punto avvenisse sempre nella direzione così determinata e come se esso fosse prodotto da un' unica forza, la quale avesse costantemente quella direzione che abbiamo chiamato *della risultante*.

Non sempre però avviene che il moto risultante nel punto sia rettilineo. Infatti, supponiamo (fig. 29.^a) che sul punto *M* operino due azioni; l'una di esse, per esempio, sia una forza, la quale, agendo continuamente, farebbe percorrere al punto *M* nelle successive unità di tempo spazi Ms' , $s's''$, $s''s'''$ sempre crescenti. Gli spazi invece che il punto *M* percorrerebbe nelle stesse unità di tempo in virtù dell'altra azione, che potrebb'essere, per esempio, una velocità costante posseduta dal punto, supponiamo che siano Mc' , $v v''$, $v'' v'''$ eguali fra loro. Determinate allora le successive posizioni del punto *M* alla fine di

ciascuna unità di tempo, si troverà, come lo mostra chiaramente la figura, che esse non possono essere sopra una linea retta, e si concluderà che il punto M nel suo movimento risultante dalle due azioni combinate percorrerà una curva $MM'M''M'''...$ Dall'esame poi della figura stessa sarà facile il desumere che la linea $M'M''M'''...$ non potrà essere una retta se non quando gli spazi $Mv', v'v'', v''v'''$, che verrebbero percorsi dal punto in virtù di una delle due azioni, variino nello stesso rapporto che gli spazi $Ms', s's'', s''s'''$, che contemporaneamente verrebbero percorsi in virtù dell'altra azione, e, in altri termini, quando si abbia

$$Ms' : s'M' = Ms'' : s''M'' = Ms''' : s'''M'''...$$

Un corpo slanciato in aria obliquamente si trova durante il suo movimento sotto l'azione contemporanea della gravità, la quale, come forza costante, farebbe percorrere al corpo sulla verticale spazi crescenti come i quadrati dei tempi, e della velocità impressa al corpo, la quale, se non vi fossero resistenze, mantenendosi costante, farebbe percorrere al corpo stesso spazi proporzionali ai tempi. (Nel fatto conviene osservare che essa andrà sempre decrescendo con una legge che dipende dalla natura delle resistenze.) Il corpo dunque in simili condizioni non potrà percorrere una linea retta, non essendovi soddisfatta la proporzione sopra accennata. Ed infatti i corpi così slanciati, come i proiettili delle armi da fuoco, percorrono nel loro movimento delle curve, che, fatta astrazione dalla resistenza dell'aria, sarebbero *parabole*, curve che deve l'artigliere saper calcolare per mandare il suo proiettile al luogo designato; la direzione in tal caso dello sparo dovrebbe essere tangente alla curva parabolica.

Un altro esempio di simili movimenti curvilinei si può avere quando con una barca si voglia attraversare un fiume. Supponendo che la macchina o l'uomo che imprimono il movimento alla barca sviluppino una forza motrice costante, vi sarà una

certa velocità della barca, colla quale il lavoro motore essendo eguale a quello resistente, il moto della barca stessa verrebbe uniforme. Questa velocità sarebbe quella colla quale la barca si muoverebbe in acque tranquille, e che supporremo quindi data e costante. D'altra parte, la corrente del fiume tende ad imprimere alla barca un movimento lungo la corrente stessa. Se rappresentiamo con $a1$ (fig. 30.^a) la velocità costante che verrebbe comunicata alla barca dal proprio motore e con 1.2 la velocità che verrebbe comunicata alla medesima dalla corrente del fiume, la direzione del movimento risultante sarà $a2$; dimodochè, volendo colla barca arrivare in B sulla sponda opposta del fiume, bisognerebbe dirigere la barca parallelamente ad $a1$. Se la velocità della corrente fosse costante in tutti i punti della larghezza del fiume, allora il moto della barca nella traversata sarebbe rettilineo. Ma invece avviene generalmente che la velocità della corrente è massima nel filone e va decrescendo verso le sponde. Allora, se supponiamo la velocità nel filone eguale ad $1.2'$ e teniamo costante la direzione dell'asse della barca, il movimento della medesima in quel punto avverrà parallelamente ad $a2'$, e da ciò quindi si intende che in generale la barca nel suo tragitto percorrerà una curva convessa verso a valle in corrispondenza al filone del fiume.

Benchè le linee che i corpi percorrono nei loro movimenti possano essere svariatissime, nondimeno nella meccanica usuale non si considerano sotto questo riguardo che due movimenti, il rettilineo ed il circolare, essendo che tutti i movimenti che si verificano nei vari pezzi delle macchine si possono ridurre a questi due tipi od a combinazioni dei medesimi.

Quando un corpo ha un moto circolare o rotatorio intorno ad un asse, i vari suoi punti percorrono contemporaneamente spazi differenti e le cui lunghezze sono precisamente proporzionali alle loro distanze dall'asse di rotazione. Se il movimento rotatorio del corpo viene prodotto da più forze, chiamando con f' ,

f', f'' gli sforzi o pressioni esercitati e con r', r'', r''' le distanze delle direzioni di queste forze dall'asse di rotazione, e supponendo che il corpo abbia fatto un giro preciso intorno al suo asse, i lavori delle tre forze date saranno rispettivamente

$$f' \times 2\pi r', \quad f'' \times 2\pi r'', \quad f''' \times 2\pi r'''$$

ed il lavoro risultante sarà la somma dei lavori parziali, purchè però si abbia l'avvertenza di calcolare come negativi o da sottrarsi i lavori di quelle forze, che tenderebbero a far girare il sistema in senso opposto.

Con ciò però noi supponiamo che le forze date agiscano in un piano perpendicolare all'asse di rotazione. Che se non fosse così, allora le forze stesse, oltre al moto di rotazione, tenderebbero a produrre un movimento nel corpo parallelamente all'asse. Così, per esempio, avverrebbe se chi volesse far girare un albero mediante una manovella (fig. 31.*) applicasse la forza motrice secondo una direzione *A 2* obliqua rispetto al piano perpendicolare all'albero stesso. Se allora noi rappresentiamo con *A 2* lo sforzo esercitato sul punto *A*, questo potrà essere decomposto in due, l'uno *A 1* in un piano perpendicolare all'asse, l'altro *1. 2* parallelo all'asse medesimo. Il primo potrà produrre il moto di rotazione; il secondo invece tenderebbe a trasportare la manovella e l'asse da *1* verso *2* e la sua azione sarebbe in generale distrutta dalla reazione dei collari, che registrano l'albero sui suoi cuscinetti. Da ciò consegue che, quando una delle forze date non agisce in un piano perpendicolare all'asse di rotazione, essa va distinta in due componenti, delle quali una sola influisce sul moto di rotazione; e questa è la componente nel piano perpendicolare all'asse, la quale risulta determinata in grandezza dalla proiezione della retta, che rappresenta la forza data sul detto piano.

Ritornando ora al nostro argomento, se noi chiamiamo con *F* la pressione risultante dalla forza data (la quale, supponendo che

le forze stesse siano tutte in piani perpendicolari all'asse di rotazione, sarà essa pure perpendicolare all'asse medesimo), e chiamiamo con R la sua distanza dall'asse, il lavoro sviluppato dalla forza risultante nella rotazione sovra accennata, sarà

$$F \times 2\pi R,$$

e si avrà dunque

$$f' \times 2\pi r' + f'' \times 2\pi r'' + f''' \times 2\pi r''' \dots = F \times 2\pi R.$$

In questa equazione il fattore 2π , il quale entra in tutti i termini, può essere ommesso, ed allora rimane

$$f'r' + f''r'' + f'''r''' \dots = FR,$$

nella quale, in luogo dei lavori delle varie forze, abbiamo semplicemente i prodotti degli sforzi locali esercitati per le distanze delle loro direzioni dall'asse di rotazione, prodotti che, come ben si vede, sono sempre proporzionali ai lavori delle singole forze, tendenti a produrre il moto di rotazione ogni volta che queste operano sopra punti di un sistema rigido.

I prodotti sopra accennati prendono il nome di *momenti* delle forze, e l'equazione che abbiamo ricavata si esprime dicendo che *in un sistema di forze che tendono a produrre un moto di rotazione intorno ad un asse il movimento della risultante, rispetto a quest' asse, è eguale alla somma algebrica dei momenti delle componenti*. Per momento poi di una forza si intende in generale il prodotto dello sforzo corrispondente alla medesima in un piano perpendicolare all' asse di rotazione per la distanza della direzione di questo dall' asse suddetto.

Supponiamo ora che si abbia un sistema qualunque di forze parallele; per esempio siano le forze f' ed f'' (fig. 18.*), ed immaginiamoci tracciata una retta qualunque $Cd \dots$ parallela alle direzioni delle forze date. Se noi prendiamo un punto qualunque della $Cd \dots$ e supponiamo che in quel punto si trovi un

asse di rotazione perpendicolare al piano delle forze, il momento della forza f' rispetto a quest'asse sarà il prodotto dello sforzo Af' per AC (supposta la $ACB...$ perpendicolare alle direzioni delle forze); così il momento della f'' sarà $Bf'' \times BC$, e ciò qualunque sia il punto scelto sulla $Cd...$ Allora i prodotti $Af' \times AC$ o $Bf'' \times BC$ si possono chiamare i momenti delle forze date rispetto alla retta $Cd...$ Applicando adunque il principio che abbiamo ora dedotto e chiamando con R lo sforzo risultante e con x la sua distanza dalla retta $Cd...$, potremo scrivere:

$$f' \times AC - f'' \times BC = R \times x.$$

Che se la retta Cd fosse la stessa direzione della risultante, allora la distanza x sarebbe nulla, ed il termine Rx sarebbe eguale a zero, quindi si avrebbe

$$f' \times AC - f'' \times BC = 0,$$

ossia

$$f' \times AC = f'' \times BC,$$

come già sapevamo ¹.

¹ Se nel piano delle forze f, f' (fig. 32) noi supponiamo condotta una retta qualunque, per esempio la $...bm...$ e dai punti A, B, C considerati come punti d'applicazione delle forze date e della risultante noi conduciamo le perpendicolari alla retta $...bm...$, sarà facile dedurre dai triangoli simili che si hanno nella figura che

$$\frac{Ce}{Aa} = \frac{BC}{AB}.$$

Ora, essendo

$$\frac{f}{f'} = \frac{BC}{AC}$$

da cui

$$\frac{f}{f' + f''} = \frac{BC}{AC + BC},$$

ossia

$$\frac{f}{R} = \frac{BC}{AB},$$

Ciò che abbiamo detto per due forze vale per un numero qualunque, come facilmente si può intendere. Noi possiamo quindi enunciare come principio generale che in un sistema di forze parallele il momento della risultante rispetto ad una retta qualunque parallela alle medesime nel loro piano è eguale alla somma dei momenti delle componenti rispetto alla stessa retta. Se poi il sistema si riducesse ad una coppia (vedi pag. 75), il suo momento sarebbe allora il prodotto di uno dei due sforzi componenti la medesima per la loro distanza. Infatti, se chiamiamo con f questi sforzi, con l la loro distanza, e supponiamo una retta parallela agli sforzi stessi e distante di x dal primo sforzo e quindi di $l-x$ dall'altro, noi osserveremo che il momento risultante sarà la somma dei momenti delle due forze, e quindi esso sarà espresso da

$$f \times x + f(l-x) = f(x + l-x) = fl.$$

si avrà

$$\frac{Ce}{Aa} = \frac{f'}{R},$$

da cui

$$R \times Ce = f' \times Aa.$$

Ora, essendo $R = f' + f''$ e $Bb = cn = am$, potremo scrivere come un'identità che'

$$R \times cn = f' \times am + f'' \times Bb.$$

Sommando questa equazione colla precedente, si avrebbe

$$R(Ce + cn) = f'(Aa + am) + f'' \times Bb,$$

ossia

$$R \times Cu = f' \times Am + f'' \times Bb.$$

I prodotti $R \times Cu$, $f' \times Am$, ecc., degli sforzi locali per le perpendicolari condotte dai loro punti d'applicazione sulla retta qualunque ... bm ... nel loro piano, si chiamano in meccanica i *momenti di posizione* delle forze, e, come ora abbiamo visto, in un sistema di forze parallele il momento di posizione della risultante è eguale alla somma dei momenti delle componenti rispetto ad una retta qualunque nel loro piano. Noi non facciamo che accennare questo principio, che è piuttosto una semplice astrazione di calcolo, non riteneudo veramente necessario il suo uso pel meccanico ordinario.

Ricordiamo ora che nel capitolo precedente (pag. 72), ragionando sulla fig. 18., abbiamo desunto le proporzioni

$$f : dIII = h : AC$$

$$f' : dIII = h : BC,$$

dalle quali si ricaverebbe

$$dIII = \frac{f \times AC}{h} = \frac{f' \times BC}{h}.$$

Dunque la porzione $dIII$ della retta Cd ... compresa dentro il poligono funicolare è eguale al momento della forza f' , oppure a quello della f'' rispetto alla Cd stessa, diviso per la distanza h del punto O dalla $a2$ nel poligono delle forze. Essendo la retta Cd ... la direzione della risultante delle forze date, i momenti delle due forze rispetto alla direzione stessa devono appunto essere eguali, in modo che la loro somma algebrica sia eguale a zero. Ma se noi prendiamo un'altra retta qualunque EF ... parallela alle forze date (fig. 33.*), allora, considerando i triangoli IEF , $A1O$, si avrà

$$EF : f' = Am : h.$$

da cui

$$EF = \frac{f' \times Am}{h}.$$

Dai triangoli poi $EII G$, $O12$ si ha

$$EG = \frac{f'' \times Bm}{h}.$$

Finalmente dai triangoli $FG III$, $aO2$ si ha

$$FG = \frac{R \times Cm}{h}.$$

Dunque noi vediamo che EF è eguale al momento della f' , EG al momento della f'' ed FG al momento della risultante divisi

per la quantità costante h . Ora, siccome il momento della R (considerata come la forza che mette il sistema in equilibrio) e quello della f'' sono di segno opposto, così la loro somma algebrica sarà la loro differenza, ed essa, divisa per la quantità h , sarà dunque rappresentata da

$$EG - FG = EF.$$

Per conseguenza la EF , parte della $mF...$ compresa dentro il poligono funicolare rappresenta il momento della forza f , che trovasi da una parte della $mF...$, rispetto alla quale si prendono i momenti, come anche la somma algebrica dei momenti delle f'' ed R che si trovano dall'altra parte, divisi per la quantità h . Quando poi si prendesse la distanza $h = 1$ la retta EF rappresenterebbe effettivamente i momenti suddetti nella scala del disegno, in chilogrammetri, se gli sforzi furono espressi in chilogrammi e le distanze in metri.

Il ragionamento che noi abbiamo applicato al caso di due soli sforzi può essere esteso ad un sistema qualunque di sforzi paralleli, che siano in equilibrio. La proposizione sopra enunciata, per altro, può essere dimostrata pel caso generale anche più brevemente. Siano infatti (fig. 34.^a) f' , f'' , f''' , f^v , F_1 , F_2 i vari sforzi che operano sopra un sistema qualunque (per esempio, una trave appoggiata ai due estremi A ed F) e sia $...SS'...$ la retta rispetto alla quale si prendono i momenti. Si è già visto (pag. 69) che, prolungando i due lati $II-III$ e $I-VI$ del poligono funicolare intersecati dalla SS' , si ha nel punto d'incontro g un punto della direzione dello sforzo risultante sia di quelli posti a destra che di quelli posti a sinistra della SS' , il quale sforzo risultante trovasi poi determinato nel poligono delle forze dalla 1,5 compresa fra i raggi $O1$ ed $O5$ paralleli rispettivamente ai lati $...II-III...$ e $...I-VI$. Ora, la somma dei momenti delle forze che trovansi da una parte, come di quelle che trovansi dall'altra della SS' sarà eguale al momento

della loro risultante, e questo sarà eguale allo sforzo $1,5$ moltiplicato per gg' . Ma dai triangoli simili $O15$, glm si ricava

$$1,5 : lm = h : gg',$$

da cui

$$1,5 \times gg' = lm \times h,$$

oppure

$$lm = \frac{1,5 \times gg'}{h}$$

e se $h = 1$ si ha

$$lm = 1,5 \times gg',$$

vale a dire eguale al momento risultante delle forze a destra come di quelle a sinistra della SS' .

La conoscenza dei momenti, dei quali abbiamo ora parlato riesce necessaria specialmente quando si deve calcolare la resistenza di una trave, di un ponte (in legno o in ferro), ecc. In simili casi assai sovente gli sforzi sopportati dalla trave consistono in un peso uniformemente ripartito. Allora se noi supponiamo la distanza AB (fig. 35.) divisa in tante parti eguali, e nel mezzo di ciascheduna consideriamo uno sforzo eguale al peso corrispondente alla parte stessa, indi veniamo a disegnare al modo ordinario il poligono funicolare $I II III IV$ ecc. (nella figura si è ommesso per brevità il poligono delle forze), sarà facile il comprendere che, aumentando sempre più il numero delle parti in cui dividiamo la AB , il poligono funicolare sopra accennato si andrà mano mano avvicinando ad una curva continua, la quale, passando per A e B sarà tangente ai lati AI , $I II$, $II III$, ecc. Questa curva è una parabola il cui vertice è in V , supposto che la AB sia perpendicolare alla direzione dei pesi (il che si può sempre ottenere scegliendo opportunamente il punto O nel poligono delle forze); in ogni modo però si avrà sempre

$$NV = \frac{1}{3} NM.$$

Se ora immaginiamo una retta qualunque $\dots xy \dots$ parallela agli sforzi dati, il momento risultante, rispetto a questa retta, di tutto il peso uniformemente ripartito sia a destra che a sinistra della retta stessa, sarà rappresentato dalla porzione xy della medesima, compresa entro la figura parabolica $A I H \dots B$, salvo il tener calcolo del fattore h se esso non fu preso eguale ad 1. Dalla semplice ispezione della figura si vede che il momento massimo corrisponde al mezzo di AB , punto nel quale, infatti, la tendenza della trave ad inflettersi riesce massima. Inoltre, se noi osserviamo che il triangolo AMB non sarebbe altro che il poligono funicolare corrispondente al caso in cui in luogo del peso uniformemente ripartito si avesse uno sforzo unico equivalente al peso totale e posto nel mezzo, ed osserviamo che in tal caso la MN rappresenterebbe il momento rispetto alla $\dots MN \dots$ passante pel mezzo della trave, ricordando che NV è eguale ad $\frac{1}{2} MN$, risulta il principio ben noto ai costruttori, che cioè il peso uniformemente ripartito, per quanto riguarda l'inflessione della trave, equivale ad un peso metà del medesimo posto nel mezzo.

Nella costruzione delle travi rettilinee, sia a reticolato che ad anima piena, la figura parabolica ora descritta serve assai bene per trovare il numero delle lamiere da rinnersi nelle varie posizioni della trave, ond'essa possa resistere convenientemente alle inflessioni che tende a produrvi il carico senza avere un peso inutile di ferro¹. Che se invece di formare la trave con varie lamiere opportunamente riunite, la si volesse fare, per esempio, di ghisa in un solo pezzo, ma di una forma tale che in ciascun punto della sua lunghezza presentasse la stessa resistenza alla flessione, è facile il comprendere che qualora si mantenga costante la larghezza del pezzo, le altezze del medesimo dovranno variare proporzionalmente ai momenti xy

¹ Vedi Cap. IX.

dati dal poligono o curva funicolare; ma in tal caso esso verrebbe ad acquistare una forma simile alla $A III \dots B$, vale a dire che il suo profilo verticale sarebbe una curva parabolica. Tali sono appunto le così dette forme di eguale resistenza, delle quali si hanno frequenti applicazioni nei bilancieri ed in altri pezzi delle macchine, come anche in alcuni ponti in ferro od in ghisa.

CAPITOLO OTTAVO.

VELOCITA' ANGOLARE. MOMENTO D' INERZIA.

FORZA CENTRIFUGA.

Il fatto che abbiamo già accennato più d'una volta parlando del moto di rotazione, vale a dire che gli spazi contemporaneamente percorsi dai varj punti del corpo che ruota sono differenti e precisamente proporzionali alle distanze dei medesimi dall'asse di rotazione, introdurrebbe a primo aspetto una difficoltà nel modo di esprimere la velocità del corpo stesso. Ed infatti non basterebbe, come nel moto rettilineo, il conoscere lo spazio percorso nell'unità di tempo; ma bisognerebbe in tal caso conoscere da quale dei punti del corpo viene percorso lo spazio. Nella pratica ordinaria, parlandosi di ruote o di altri simili corpi in rotazione, se ne esprime la velocità mediante il numero dei giri che essi compiono in un minuto primo. In tal caso, conoscendosi il diametro della ruota o la distanza del punto che si considera dall'asse di rotazione, è facile il calcolare la lunghezza di ciascun giro e quindi lo spazio percorso dal punto stesso. Così, per un esempio, conoscendosi che una ruota fa 40 giri al minuto, e che il suo diametro è di metri 0,60, onde calcolare con questi dati la velocità assoluta della medesima alla periferia, si incomincierebbe a trovare la circonferenza della ruota stessa, che sarebbe eguale a $0,60 \times 3.14 = 1,88$. Moltiplicando poi il risultato $1,88$ per 40 si otter-

rebbe lo spazio percorso in un minuto primo, che sarebbe eguale a metri 75,20. Finalmente $\frac{75,20}{60} = 1^m,25$ sarebbe la velocità richiesta.

Questo metodo però, comodissimo in pratica quando si tratta di ruote o di altri corpi che compiono intere rivoluzioni intorno ad un asse, non potrebbe del pari essere adottato in generale nella meccanica. In tal caso invece si esprime la velocità del corpo indicando lo spazio percorso nell'unità di tempo da un punto di esso distante di una unità dall'asse di rotazione, sia poi che un simile punto esista realmente nel corpo o che esso ne esista fuori, supponendolo naturalmente in tal caso invariabilmente collegato al corpo stesso. La velocità così definita prende il nome di *velocità angolare*. Conoscendo la velocità angolare si trova facilissimamente la velocità assoluta di un punto qualsiasi, del quale sia nota la distanza dall'asse di rotazione. Infatti, essendo la velocità angolare la velocità assoluta di un punto distante di 1 dall'asse di rotazione, è evidente che se il punto in questione avesse dall'asse una distanza eguale a 2, la sua velocità assoluta sarebbe doppia, ossia due volte la velocità angolare, ecc. In conclusione, per trovare la velocità assoluta di un punto qualunque del corpo che si considera basterà moltiplicare la velocità angolare del medesimo per la sua distanza dall'asse di rotazione. Chiamando quindi con ω la velocità angolare e con r la distanza anzidetta, si avrà per quel punto che si considera

$$v = \omega r.$$

Viceversa, conoscendo la velocità assoluta di un punto determinato del corpo, se ne calcolerà la velocità angolare dividendo questa velocità assoluta per la distanza del punto stesso dall'asse di rotazione, e si avrà quindi

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Se adunque noi volessimo calcolare la velocità angolare della ruota citata nell'esempio precedente, essendosi già trovata la velocità assoluta della sua periferia di metri 1,25, ed essendo la distanza di questa periferia dall'asse di metri 0,30, la velocità angolare sarà

$$\omega = m. \frac{1,25}{0,30} = m. 4,17.$$

La stessa velocità angolare poteva poi essere calcolata direttamente coi dati originarii. In tal caso la lunghezza di un giro sarebbe stato di

$$2^{\pi} \times 3.14 = 6^{\pi}.82$$

e lo spazio percorso in un minuto primo

$$6.28 \times 40 = 251^{\pi}.20,$$

e dividendo finalmente per 60, si sarebbe ottenuto egualmente

$$\omega = \frac{251^{\pi}.20}{60} = 4^{\pi}.18.$$

Parlando in generale dei corpi in movimento, noi abbiamo dimostrato come la forza motrice da essi accumulata, oppure il lavoro che essi possono produrre colla velocità che possiedono, siano rappresentati dalla *potenza viva* del corpo, ossia dalla metà del prodotto della massa pel quadrato della velocità posseduta dal corpo stesso. Ora, se il corpo gira intorno ad un asse, la velocità dei vari suoi punti essendo differente, non è più possibile il calcolare la potenza viva nel modo sopra indicato. In tal caso è necessario ricorrere ad un artificio, il quale consiste nel dividere o nell'immaginare diviso il corpo in tante parti, in ciascuna delle quali le distanze dei vari punti dall'asse si possano considerare come eguali; si trova allora la potenza viva di ciascuna parte, calcolandone la relativa velocità assoluta, e, fatta quindi la somma delle diverse potenze vive parziali, si ottiene la potenza viva del corpo intero. Per esprimere meglio la serie delle accennate operazioni, chiamiamo con m' , m'' , m''' ... le masse delle diverse parti, nelle quali si è supposto

diviso il corpo; r' , r'' , r''' ... le relative distanze delle medesime dall'asse di rotazione, e finalmente con ω denonuiamo la velocità angolare del corpo. Le velocità assolute allora delle varie parti saranno rispettivamente

$$\omega r', \omega r'', \omega r''' \dots$$

e le loro potenze vive saranno

$$\frac{1}{2} m' \omega^2 r'^2, \frac{1}{2} m'' \omega^2 r''^2, \frac{1}{2} m''' \omega^2 r'''^2 \dots$$

e per conseguenza la potenza viva dell'intero corpo sarà

$$\frac{1}{2} m' \omega^2 r'^2 + \frac{1}{2} m'' \omega^2 r''^2 + \frac{1}{2} m''' \omega^2 r'''^2 \dots$$

ossia scrivendo una volta sola il fattore comune $\frac{1}{2} \omega^2$:

$$\frac{1}{2} \omega^2 \{ m' r'^2 + m'' r''^2 + m''' r'''^2 + \dots \}.$$

I prodotti $m' r'^2$, $m'' r''^2$, ecc., delle varie masse pei quadrati delle loro distanze dall'asse di rotazione hanno ricevuto il nome di *momenti d'inerzia*, dimodochè la quantità chiusa fra le parentesi nell'espressione antecedente si chiama il *momento d'inerzia* dell'intero corpo, e per conseguenza si può dire che *la potenza viva di un corpo in rotazione si ottiene moltiplicando la metà del quadrato della sua velocità angolare pel momento di inerzia del corpo stesso.*

Chiamiamo ora con M la massa dell'intero corpo e poniamo

$$m' r'^2 + m'' r''^2 + m''' r'''^2 + \dots = M R^2;$$

questa quantità R non sarebbe altro che la distanza dall'asse di rotazione di un certo punto, pel quale, se noi supponessimo in esso concentrata tutta la massa del corpo, il momento d'inerzia e quindi anche la potenza viva sarebbe eguale a quella dell'intero corpo. In conclusione, questo punto corrisponderebbe in certo modo al centro di gravità pei corpi che hanno moto di rotazione. La distanza R così definita si chiama il *raggio di girazione*.

La ricerca del momento d'inerzia o del raggio di girazione non può farsi in generale senza l'uso del calcolo superiore. Noi perciò ci limiteremo a dare nella seguente tabella i valori dei quadrati dei raggi di girazione per alcune forme più comuni:

INDICAZIONE DEI CORPI	R ¹
1.° 	Asta <i>AB</i> sottile che gira intorno ad un asse <i>BC</i> passante per un suo estremo od anche per il suo punto di mezzo $\frac{1}{3} AC^2$
2.° 	Asta (sottile) curvata secondo un arco di circolo che gira intorno ad un raggio passante per un estremo o per il mezzo Quando l'arco è $\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{4}$... di circolo $\frac{1}{2} r^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{AB} \sin 2\alpha \right)$ $\frac{1}{2} r^2$
3.° 	Disco omogeneo sottile = $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$... di circolo che gira intorno ad uno dei raggi che lo limitano o che passi pel punto di mezzo $\frac{1}{4} r^2$
4.° 	Cilindro circolare retto che gira intorno al suo asse (r = raggio della base) . . . $\frac{1}{2} r^2$
5.° 	Cerchione di ruota a sezione rettangolare, che giri intorno all'asse (r = raggio interno, r' = raggio esterno). $\frac{1}{2} (r^2 + r'^2)$
6.° 	Cono retto circolare (r = raggio). $\frac{3}{10} r^2$
7.° 	Sfera o mezza sfera girante intorno ad un diametro perpendicolare alla base (r = raggio). $\frac{2}{5} r^2$
8.° 	Sfera o mezza sfera vuota sottilissima che giri c. s. . . . $\frac{2}{3} r^2$
9.° 	Parallelepipedo che gira intorno allo spigolo c (a, b, c = tre spigoli) $\frac{1}{3} (a^2 + b^2)$ Idem che gira intorno ad un asse parallelo a c condotto per il mezzo dello spigolo b contiguo $\frac{1}{3} \left(a^2 + \frac{1}{4} b^2 \right)$
10.° 	Idem intorno ad un asse parallelo a c pel centro di figura $\frac{1}{12} (a^2 + b^2)$

Quando si conosca il valore del momento d'inerzia di un corpo, per rispetto ad un asse passante per il suo centro di gravità, si può facilmente calcolare il momento d'inerzia dello stesso corpo per rispetto ad un asse qualunque parallelo al primo. Infatti, per un teorema, che noi ci limitiamo ad enunciare, il momento richiesto sarebbe eguale al momento dato per rispetto all'asse passante pel centro di gravità, più il prodotto della massa del corpo pel quadrato della distanza del nuovo asse dal primo. Chiamando M la massa del corpo, R il suo raggio di girazione per rispetto all'asse passante pel centro di gravità, d la distanza di quest'asse dall'asse dato, e finalmente R' il raggio di girazione rispetto al nuovo asse, si avrà

$$MR'^2 = MR^2 + d^2 M.$$

ossia

$$R'^2 = R^2 + d^2.$$

Per agevolare l'intelligenza e l'applicazione delle formole e delle teorie, che abbiamo ora indicato riguardo ai momenti di inerzia, presenteremo i seguenti due esempi;

1.° Si voglia determinare la potenza viva posseduta da un volante¹ di ghisa, il cui cerchione si possa considerare come avente per sezione un rettangolo, in cui la larghezza nel piano della ruota sia di metri 0,10 e l'altezza o grossezza del cerchione sia metri di 0,08. Il volante inoltre abbia il diametro di metri 3,00 e faccia 50 rivoluzioni al minuto. Finalmente per brevità ammettiamo che non si tenga calcolo della potenza viva posseduta dalle braccia dello stesso volante.

Per risolvere questo problema bisognerà calcolare prima il raggio di girazione del volante o meglio del suo cerchione. Perciò, guardando nella tabella, troveremo al N. 5

$$R^2 = \frac{1}{2} (r^2 + r'^2)$$

¹ Gran ruota che si applica alle macchine per renderne più regolare il movimento.

ed essendo nel nostro caso $r = 1^m.40$, $r' = 1^m.50$, si avrà

$$R' = \frac{1}{2} (1^m.40^2 + 1^m.50^2) = 2.10. \quad (1)$$

Dopo ciò converrà calcolare la massa del detto cerchione, la quale si otterrà facendone prima il volume, indi moltiplicando questo per il peso di un metro cubo di ghisa che è di chilogrammi 7200 circa e finalmente dividendo il risultato, che sarà il peso del cerchione, per 9.81. Avremo allora:

$$\text{Vol. del cerchione} = 2 \times 3.14 \times 1^m.45 \times 0.10 \times 0.08 = 0.0725$$

$$\text{Peso} \quad \quad \quad = 0.0725 \times 7200 = \text{chilogrammi } 522$$

$$\text{Massa} \quad \quad \quad = \frac{522}{9.81} = 53.$$

Il momento d'inerzia dunque del volante sarà

$$53 \times 2.10 = 111.3.$$

Ora per calcolarne la potenza viva è necessario conoscerne la velocità angolare. Questa velocità si troverà moltiplicando la lunghezza $6^m.28$ della circonferenza che ha per raggio l'unità per il numero dei giri 50 e dividendo per 60 e si avrà

$$\frac{6.28 \times 50}{60} = \omega = 5^m.3.$$

La potenza viva richiesta sarà allora $\frac{1}{2} 5^m.3^2 \times 111.3 = 1560$ chilogrammetri.

2.° Si cerchi la potenza viva posseduta dalle due palle di un pendolo conico (regolatore abbastanza noto, che si applica specialmente alle macchine a vapore fisse vedi pag. 104), nel quale supporremo la distanza del centro di ciascuna palla dal-

¹ R verrebbe ad essere in questo caso assai prossimo al raggio medio $1^m.45$ del cerchione.

l'asse di metri 0.20, il diametro della palla di metri 0.06, il numero dei giri per minuto eguale a 40 e supporremo finalmente che le palle siano di ottone massiccie.

Nella nostra tabella al numero 7 noi troviamo il quadrato del raggio di girazione per una sfera e per rispetto ad un asse passante per il suo centro. Esso sarebbe pel nostro caso

$$R^2 = \frac{2}{3} \times 0,03^2 = 0.00036.$$

Essendo poi il nostro asse di rotazione a metri 0.20 dal centro delle sfere sarà

$$R'^2 = 0.00036 + 0.20^2 = 0.04036.$$

Ora, il volume delle due sfere essendo

$$2 \times \frac{4}{3} \times 3.14 \times 0,03^3 = 0,000318$$

il loro peso, ritenendo il peso di 1 m. c. di ottone eguale a chilogrammi 8500 circa, sarà

$$0,000318 \times 8500 = \text{chilogrammi } 2.7$$

e la massa sarà

$$\frac{2.7}{9.81} = 0.275.$$

Allora il momento d'inerzia sarà

$$0.04036 \times 0.275 = 0.0116.$$

La velocità angolare poi essendo eguale a

$$\frac{6.28 \times 40}{60} = 4,19$$

si avrà per ultimo la potenza viva richiesta

$$\frac{1}{2} \times 4.19^2 \times 0.0116 = 0.1017 \text{ chilogrammetri.}$$

— Passiamo ora per ultimo a considerare un altro fatto importante, che si verifica ogni volta che un corpo si muove secondo una curva. Se, per non uscire dal campo usuale, noi ci figuriamo una ruota che giri, sarà facile il comprendere che la massa della medesima e soprattutto quella del suo cerchione, trovandosi in un dato istante animata d'una certa velocità, tenderebbe, in virtù della potenza viva acquistata, a continuare il proprio movimento seguendo la tangente in quel punto alla circonferenza, in luogo di cambiare immediatamente direzione per seguire la circonferenza stessa. Questa tendenza del cerchione ad allontanarsi dal centro viene distrutta dalla resistenza delle braccia della ruota; ma essa potrebbe benissimo tradursi in atto quando lo sforzo corrispondente alla medesima divenisse tale da superare la tenacità delle braccia, come infatti qualche volta avvenne in alcuni volanti. Questa azione o piuttosto reazione che oppone il corpo nel subire le continue deviazioni necessarie perchè esso percorra la circonferenza o la curva in genere che deve percorrere, fu denominata *forza centrifuga* e talora si chiama col nome di *forza centripeta* lo sforzo necessario per mantenere il corpo sulla curva.

La *forza centrifuga* non essendo che una conseguenza del moto curvilineo, evidentemente dovrà dipendere dalla velocità del corpo e dalla maggiore o minore curvità della linea che esso percorre, ossia, considerando noi semplicemente il moto circolare, dal raggio del circolo descritto. Sia A (fig. 36.) il corpo, che si considera, o più precisamente sia A l'estremo del suo raggio di girazione ed $AA'D$ sia il circolo descritto dal detto punto A , supponiamo, con moto uniforme; finalmente sia AA' l'arco percorso in un tempo qualunque indefinitamente piccolo, se si vuole, e colla velocità costante v . Chiamando allora con t questo tempo si avrà $AA' = vt$.

L'azione *centripeta*, dovendo mantenere sempre il punto A sulla circonferenza, avrà dovuto effettuare su di esso, durante il percorso AA' una deviazione totale eguale ad Aa , la quale rappresenterà quindi lo spazio che l'azione stessa avrebbe potuto far percorrere al punto A nel tempo t (vedi Capitolo VI). Ma l'azione centripeta essendo costante, lo spazio Aa sarà stato percorso seguendo le leggi del moto uniformemente accelerato, come del resto è facile l'accertarsene osservando che Aa , non essendo che la proiezione dell'arco AA' sul diametro AD , se noi immaginiamo diviso AA' in tante parti eguali, le proiezioni di queste a partire dal punto A vanno crescendo e precisamente come i quadrati degli archi presi sopra AA' . Allora si avrà

$$Aa = \frac{1}{2} \varphi t^2$$

dove φ rappresenterà l'accelerazione di velocità con cui sarà stato percorso Aa , accelerazione che sarà eguale allo sforzo esercitato dall'azione centripeta diviso per la massa del corpo A . Essendo adunque f questo sforzo, sarà

$$\varphi = \frac{f}{M}.$$

Ora, dall'equazione precedente noi ricaviamo

$$t = \frac{AA'}{v}$$

e da una nota proprietà geometrica del circolo si ha

$$AA'^2 = AD \times Aa = 2R \times Aa.$$

Sostituendo il valore trovato di t nella seconda equazione si ottiene

$$Aa = \frac{1}{2} \varphi \frac{AA'^2}{v^2} = \frac{1}{2} \varphi \times \frac{2R \times Aa}{v^2}.$$

Dividendo allora i due membri di quest'ultima equazione per A si ha

$$1 = \frac{1}{2} \gamma \frac{2R}{v^2}$$

da cui

$$v^2 = \frac{1}{2} R$$

e finalmente

$$\gamma = \frac{v^2}{R}$$

oppure

$$f = M \frac{v^2}{R}.$$

Lo sforzo dunque (in chilogrammi) esercitato dall'azione centripeta, ossia la così detta forza centrifuga, è direttamente proporzionale alla massa del corpo e al quadrato della sua velocità ed inversamente al raggio della circonferenza descritta.

Se noi chiamiamo con ω la velocità angolare, sarà $v = \omega R$ e $v^2 = \omega^2 R^2$; sostituendo allora questi valori otterremo un'altra espressione della forza centrifuga, vale a dire sarà

$$f = M \frac{\omega^2 R^2}{R} = M \omega^2 R$$

La forza centrifuga sviluppandosi dovunque abbiano luogo moti curvilinei esercita spesso la sua azione non sempre trascurabile sul movimento delle macchine come dei corpi in genere. Essa è una delle cause che diminuiscono l'accelerazione di velocità dei corpi cadenti verso l'equatore per rispetto a quella che i corpi stessi hanno verso i poli. In fatti la velocità di rotazione della terra all'equatore essendo di m.¹ 463 per secondo ed il raggio essendo di m.¹ 6377946, l'accelerazione γ dovuta alla forza centrifuga e che viene in diminuzione di quella comunicata dalla gravità, sarà

$$\gamma = \frac{v^2}{R} = \frac{463^2}{6.377.946} = 0,0335.$$

Sulle ferrovie l'azione della forza centrifuga si fa sentire tutte le volte che il convoglio percorre una curva, e quest' azione potrebbe essere tale da compromettere la stabilità del convoglio se nella costruzione della strada non si avesse cura di tenere rialzata la rotaja esterna in modo che il profilo trasversale della strada abbia una pendenza verso il centro della curva inversamente proporzionale al raggio della medesima.

Finalmente, in tutte le macchine in cui si hanno manovellè od altri simili pezzi, i quali non si trovano simmetricamente disposti rispetto all'asse di rotazione, la forza centrifuga che si sviluppa inegualmente intorno all'asse tende a determinare dei movimenti oscillatori in un piano perpendicolare all'asse stesso, per eliminare i quali conviene adattare dei contrappesi dalla parte opposta della manovella in modo da contrabilanciare la forza centrifuga da una parte e dall'altra dell'asse. Così in fatti si pratica nei torni da tornire quando sono mossi da pedali e così pure nelle ruote motrici delle locomotive.

La forza centrifuga, del resto, non esercita sempre un'influenza dannosa. Essa ha ricevuto un impiego utilissimo nel regolatore detto comunemente pendolo conico. Questo organo, il quale serve a regolare automaticamente la forza motrice nelle macchine a vapore come anche delle ruote idrauliche, consta essenzialmente di un albero messo in rotazione dalla macchina stessa ed al cui estremo superiore sono articolate due braccia che terminano ciascuna con una palla avente un certo peso. In virtù della forza centrifuga, girando l'apparecchio, le braccia si scosteranno dall'albero centrale sempre più quanto più sarà grande la velocità di rotazione. Con una data velocità di rotazione vi sarà una posizione delle braccia nella quale il peso delle palle e la forza centrifuga si faranno equilibrio. Se ora la velocità della macchina, e quindi quella del regolatore venissero ad aumentare, la forza centrifuga aumentando farebbe innalzare maggiormente le palle; viceversa, diminuen-

dosi la velocità della macchina, il peso delle palle le farebbe abbassare. Ma l'innalzamento o l'abbassamento delle palle, mediante facili meccanismi di trasmissione, fa muovere opportunamente una valvola, che trovasi nel tubo il quale ammette il vapore nella macchina, chiudendola alquanto nel primo caso, aprendola nel secondo ¹.

Un altro utile impiego dell'azione centrifuga l'abbiamo negli asciugatoi detti appunto *a forza centrifuga* o *idroestrattori*. Questi asciugatoi si usano comunemente e con molto vantaggio per estrarre l'acqua dalle lingerie, dalle lane e da altre simili materie state sottoposte prima a lavatura e costituiscono uno dei principali apparecchi nelle raffinerie di zucchero. Essi constano essenzialmente di un vaso cilindrico di 1.^m in media di diametro entro il quale se ne trova un altro di rame o di zinco tutto bucherato e montato sopra un albero verticale, che corrisponde all'asse dei due vasi. Questo vaso interno riceve, per mezzo di una trasmissione opportuna, un rapidissimo moto rotatorio potendo fare fino a 3000 giri al minuto; in esso venendo allora posta la materia da asciugarsi avviene che, per l'azione centrifuga, tutta l'acqua, che non trovasi troppo fortemente impegnata nei pori della materia, si porta verso la periferia del vaso e, passando attraverso i fori del medesimo si slancia nello spazio annulare fra i due vasi, d'onde poi viene condotta via da un canale apposito. Con questo apparecchio le biancherie appena estratte dall'acqua in pochi secondi vengono ridotte semi-asciutte, estraendosi dalle medesime una quantità d'acqua assai maggiore che con tutti gli altri sistemi impiegati per lo stesso scopo.

¹ Essendo qui il nostro scopo solamente quello di accennare un' applicazione della forza centrifuga, non parliamo dei perfezionamenti apportati modernamente a questo organo.

CAPITOLO NONO.

APPLICAZIONI DELLA MECCANICA ALLA STABILITÀ¹ DELLE COSTRUZIONI¹.

Le teorie che abbiamo esposte, specialmente riguardo all'equilibrio degli sforzi applicati sia ad un solo punto che ai varj punti di un sistema rigido e le relative soluzioni grafiche, ricevono una importantissima applicazione nella costruzione tanto delle macchine che degli edificj, determinandosi con esse gli sforzi che devono sopportare le varie parti, onde poterne poi proporzionare le dimensioni. Benchè non sia nostro scopo in questo libro il trattare delle applicazioni della meccanica, ma semplicemente l'espone i principj elementari, nondimeno crediamo di far cosa molto utile portando qui alcuni esempj di tali applicazioni nelle quali le soluzioni grafiche precedentemente dimostrate riescono di grandissimo vantaggio rendendo speditissime e alla portata di chiunque la calcolazione approssimata, se non esatta, delle dimensioni delle varie parti necessarie per la conveniente stabilità dell'insieme.

Fra queste applicazioni meritano speciale considerazione quei sistemi poligonalì che si impiegano continuamente nelle costruzioni e che sono conosciuti sotto il nome di travi armate, di

¹ Vedasi il trattato del prof. Reuleaux, *Der Constructeur*. Ediz. 1870.

armature da tetti, di travi a reticolato. Tutti questi sistemi si possono facilmente paragonare a dei poligoni articolati, supponendo che i varj pezzi, di cui essi si compongono, siano in ciascuno vertice semplicemente articolati, in luogo di essere, come in fatto, collegati più o meno rigidamente fra loro. Questa ipotesi, tendente spesso a far assegnare a quei pezzi dimensioni alquanto maggiori del bisogno, non è certamente dannosa in pratica, tanto più che nella maggior parte dei casi la rigidezza di quei collegamenti non è tale da potervi fare grande assegnamento. Oltre a ciò, supponendo che tutti i movimenti possibili avvengano solo nelle unioni dei varj pezzi e che questi si conservino sempre rettilinei, si ammetterà che tutti gli sforzi interni, che hanno luogo nel sistema, si verifichino nella direzione dell'asse di ciascun pezzo, ossia si riducano a compressioni o a stiramenti, evitandosi con ciò di tener calcolo delle flessioni dei pezzi stessi. Ed in fatto noi dobbiamo figurarci che, se una flessione avesse luogo in uno dei pezzi componenti l'insieme, essa, secondo l'ipotesi ammessa, porterebbe come conseguenza una deformazione nei vertici del poligono nei quali quel pezzo mette capo, deformazione che non può avvenire quando quei vertici siano in equilibrio, tenuto calcolo di tutti gli sforzi che hanno azione sui medesimi. Del resto, ciò non toglie che, nel calcolare le dimensioni specialmente dei pezzi sottoposti a compressione ed aventi una certa lunghezza, si debba aver riguardo anche alle azioni tendenti ad infletterli, calcolandone colle formole ordinarie il *momento di resistenza* o per lo meno ammettendo per essi un coefficiente di resistenza ¹

¹ Nella scienza delle costruzioni si chiama coefficiente di resistenza lo sforzo di pressione o di tensione a cui può resistere un pezzo (prismatico) di una data materia per ogni unità quadrata di sezione trasversale. Così pel ferro il coefficiente di resistenza, che può essere usato con sicurezza, è in media di chilogrammi 6,00 per ogni millimetro quadrato, sia per lo stiramento che per la compressione. Pel legno esso sarebbe da 50 a 70 chilogrammi per ogni centi-

convenientemente basso. Ciò posto consideriamo i seguenti esempj:

1.° *Trave armata semplice* (fig. 37.°).

Questa trave si componga di un pezzo AB rettilineo orizzontale caricato di un peso uniformemente ripartito; nel suo mezzo esso sia sostenuto da un monaco, il quale si collega in C con due tiranti AC, CB .

Il peso uniformemente ripartito sopra AD , che chiameremo $2P$, darà luogo ad uno sforzo eguale a P nel punto D e ad un altro pure eguale a P in A . Così pure il peso $2P$ ripartito fra D e B darà una pressione eguale a P in D ed un'altra eguale ancora a P in B . Le reazioni poi dei due appoggi dovendo essere eguali in tutto al peso totale $4P$ saranno ciascheduna eguali a $2P$ e siccome in A e in B si hanno già le pressioni P , così rimarranno le reazioni risultanti in A e in B ciascheduna eguale a P . In altri termini noi possiamo considerare il peso $2P$ ripartito sopra AD sopportato metà in A e metà in D : così pure il peso di DB si potrà considerare come sostenuto metà in D e metà in B . Allora il monaco in D viene a sostenere un peso eguale a $P + P = 2P$. In A e in B poi la resistenza degli appoggi darà luogo a due sforzi eguali diretti dal basso all'alto e la cui somma dovrà essere eguale allo sforzo $2P$ che essi devono equilibrare: quanto alla parte eguale a P del peso della trave che viene sopportato in A e in B , essa si trascura come direttamente distrutta dalla resistenza dell'appoggio. Incominciando allora a considerare il vertice A , noi avremo in esso lo sforzo esterno P , una compressione lungo AD che chiameremo 1 ed una tensione 2 nel tirante AC .

metro quadrato, e pei pezzi lunghi, esso potrebbe ridursi a chilogrammi 30 ed anche a molto meno, secondo i casi e secondo la qualità del legname. Per la ghisa il coefficiente per la compressione e per prismi corti è di chilogrammi 4,00 circa per millimetro quadrato e per lo stiramento è di circa chilogrammi 2,00 a chilogrammi 2,50 per mm. q.

Perchè questi tre sforzi si facciano equilibrio è necessario che la compressione 1 e la tensione 2 abbiano i valori determinati dai lati ab e bP nel triangolo abP in cui Pa rappresenti in grandezza e in direzione lo sforzo P e in cui sia ab parallelo ad AB , bP parallelo ad AC . Determinata così la compressione 1 del pezzo AD e la tensione 2 del tirante AC potremo passare al vertice D . In esso abbiamo lo sforzo $2P$ esterno, la compressione 1, la compressione 3 del monaco e la compressione 4. Facendo adunque $2P, a = 2P$ ed essendo da a già condotto la ab eguale alla compressione 1, si condurrà da b la parallela alla DC , indi dal punto $2P$ la parallela a DB la quale, incontrando la precedente nel punto c , verrà a chiudere il poligono $2Pa bc$ e quindi a determinare il valore della compressione 3 e della compressione 4, quali devono essere perchè il punto D si trovi in equilibrio. Naturalmente la compressione 4 deve riescire eguale alla 1, come infatti riesce nel disegno, e la tensione 5 dovrà pure essere eguale alla 2 per essere il sistema simmetrico. Del resto questa tensione si troverebbe rappresentata dalla cP nel triangolo $cP2P$, che rappresenterebbe il poligono delle forze intorno al vertice B .

Osserveremo qui che, intendendo noi per sforzi interni quelle reazioni che avvengono nell'interno dei varj pezzi in seguito alle azioni di compressione o di stiramento provenienti dagli sforzi esterni, reazioni che devono stabilire l'equilibrio cogli sforzi esterni stessi, esse verranno rappresentate nel relativo poligono delle forze nel loro vero senso quando gli sforzi esterni siano presi pure nel senso secondo cui essi operano. Se invece questi saranno presi nel poligono delle forze in senso opposto, anche le reazioni interne riesciranno in senso contrario. Che se poi noi intendiamo per sforzi interni le azioni direttamente provenienti dagli sforzi esterni, vale a dire le componenti dei medesimi nelle direzioni dei varj pezzi, essi allora riescirebbero nel poligono delle forze diretti in senso opposto, quando gli sforzi esterni

vi siano stati presi nel vero senso e viceversa. Così nel nostro caso, prendendo $Pa = P$ dal basso all'alto, senso secondo cui in fatti si manifesta l'azione dell'appoggio in A , i lati ab e bP rappresenterebbero nel loro vero senso la reazione del pezzo AD che si oppone alla sua compressione, e del tirante AC , che si oppone al suo stiramento: queste reazioni sono quelle in fatti che equilibrano lo sforzo P . Invece gli sforzi diretti con cui il pezzo AD viene compresso e il tirante AC viene stirato, sarebbero rappresentati rispettivamente dai lati ab , bP presi però in senso opposto, vale a dire da ba , Pb . Finalmente noteremo che, allo scopo di distinguere immediatamente nel poligono delle forze le compressioni dalle tensioni, si è adottato l'uso di rappresentare le prime con linee doppie e le seconde con linee semplici; così pure nello schema rappresentante il poligono articolato si rappresentano con linee doppie i pezzi sottoposti a pressione e con una semplice linea quelli sottoposti a tensione.

2.^o *Trave armata con due monaci* (fig. 38.^a) (disposizione assai in uso specialmente pei carri ferroviarii).

Supponendo ancora il peso uniformemente distribuito ed i due monaci disposti in modo che sia $AC = DB = CD$ gli sforzi risultanti in C e in D saranno ciascheduno eguale a P e le pressioni sopportate in A e in B saranno pure eguali come prima a P . Disegnando allora aP parallelo e proporzionale a P , ab parallela ad AC , Pb parallela ad AE si avranno nel triangolo abP in ab la compressione 1 e in Pb la tensione 2. Passando ora al vertice C si avrà lo sforzo esterno eguale a P , il quale verrà rappresentato nel relativo poligono delle forze da Pa , indi la compressione 1 già rappresentata pure in ab . Tirando poi la bc parallela a CE e Pc parallela a CD si otterranno la compressione 3 e la compressione 4. Pel vertice E si hanno: lo sforzo 3 rappresentato in cb , la tensione $2 = bP$, la tensione 5, la quale verrà per conseguenza rappresentata dalla stessa cP . Finalmente pel vertice D avremo lo sforzo

esterno P rappresentato da aP , indi la compressione 4; in cb avremo la compressione 6 ed in ab la compressione 7. Per ultimo, osservando che $cP = ab$ e che perciò esso può rappresentare del pari lo sforzo 7, nel triangolo acP rappresentante il poligono delle forze intorno al punto B si avrà in ac la tensione 8. Del resto, osservando che l'armatura è simmetrica rispetto all'asse verticale che passa pel suo mezzo, si poteva già prima prevedere che gli sforzi 6, 8, 7, dovevano essere rispettivamente eguali agli sforzi 3, 2, 1.

Nel caso in cui la disposizione dei pesi sulla trave fosse tale che la pressione in A non riescisse eguale allo sforzo in C , chiamando con P' quest'ultimo sforzo si verrebbe ad ottenere il poligono delle forze tracciate nella fig. 38.^a (a), nella quale $P'a'b'c'P'$ sarebbe il poligono corrispondente agli sforzi operanti in C , essendo messo $P'a' = P'$; $a'b'$ eguale come prima alla compressione lungo AC ; $b'c'$ eguale alla compressione 3; $c'P'$ eguale alla compressione 4. Ma in tal caso, se noi veniamo al vertice E troviamo che non è più possibile l'equilibrio almeno colla disposizione adottata. Volendo lasciare il tirante EF orizzontale bisognerebbe allora introdurre due altri tiranti da E in D e da C in F .

3.^o Trave armata con varj monaci (fig. 39.^a).

Supponendo eguali fra loro le tratte AB , BC , ecc. e $2P$ il peso uniformemente ripartito, su ciascheduna di esse, si verranno, mediante le considerazioni fatte pel 1.^o esempio, a determinare per gli sforzi che avranno luogo nei punti $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ i valori segnati sulla figura. Allora nel poligono delle forze si prenda $ae = 7P$ (sforzo nel vertice A) e, condotte le af , e f , si avranno secondo il solito, la compressione 1 e la tensione 2. Fatto poi $ab = 2P$ si compia il poligono $bafgb$, il quale darà la compressione 3 e la compressione 4, necessarie per l'equilibrio del punto B . Passando ora al vertice K , nel quale si hanno gli sforzi: 3, 2, 6, 5, si com-

pirà il poligono $gfekg$, nel quale sarà eh eguale alla tensione 6 e gh eguale alla tensione 5. Intorno al vertice C avendosi gli sforzi: $2P, 4, 5, 7, 9, 8$; preso $cb = 2P$, si formerà il poligono $cbghikc$, per compiere il quale si dovrà osservare che la tensione 9, essendo simmetrica alla 5, sarà eguale alla medesima. Si avranno così le compressioni 7 e 8 e si potrà notare che la compressione 7 riesce eguale al risultante degli sforzi 5 e 9 più il peso $2P$, come infatti risulta chiaro anche dal semplice esame della disposizione degli sforzi intorno al punto C . Dal vertice C possiamo passare al vertice L , sul quale operano la compressione 7 e la tensione 6 già determinate, indi la tensione 11 e la tensione 10. Per questi sforzi avremo allora il poligono $ihemi$, nel quale sarà em la tensione 11 ed mi la tensione 10. In seguito passiamo al vertice D in cui si hanno gli sforzi: $2P$ (esterno), 8, 12, 13; i quali saranno rappresentati nel poligono $dc k l d$, dove $dc = 2P$; $kl = gf = 2P$ è la compressione 9 ed ed la compressione 13. Per determinare ancora la tensione 14 consideriamo il vertice M , nel quale abbiamo gli sforzi: 12, 9, 10, 14, che verranno rappresentati nel poligono $l k i m i$ dove il lato mi rappresenterà la tensione 14. Finalmente passiamo al vertice E intorno a cui operano gli sforzi: $2P, 13, 14, 15$, nonché due altri dall'altra parte di EN rispettivamente eguali a 14 e a 13. Questi sforzi daranno luogo al poligono $p d l m n q p$, nel quale sarà mn la compressione 15. Per la costruzione di questo poligono valgono le osservazioni già fatte per quello del vertice C . Quanto agli altri sforzi che si trovano nell'altra metà della trave, essi saranno rispettivamente eguali a quelli della metà calcolata, e non si avrebbe quindi per essi che ripetere simmetricamente gli stessi poligoni.

Gli esempj che abbiamo presentati possono bastare per dare un'idea del metodo da seguirsi per determinare i varj sforzi, qualunque sia la disposizione della trave armata. Daremo ora alcuni esempi di armature per tetti.

1.° Si abbia un'armatura composta semplicemente di due puntoni AB, BD (fig. 40.*), di due mezze catene AC, CD e di un tirante CB .

Chiamando con $2P$ il peso uniformemente distribuito sopra una metà dell'armatura, nel vertice B della medesima graverà metà del peso di un puntone e metà di quello dell'altro, il che darà uno sforzo totale $2P$; sui due appoggi allora si avranno da considerare due reazioni risultanti eguali a P ciascheduna. Fatta allora nel poligono delle forze $ab = P$ e condotta ac parallela ad AB , bc parallela ad AC si avrà in ac la compressione 1 e in bc la tensione 2. Così, passando al vertice B si otterrà il poligono delle forze $dac ed$ dove $ad = 2P$, ce è eguale alla tensione 3 ed ed eguale alla compressione 4. Quanto alla tensione 5, essa si otterrebbe con eb e sarebbe evidentemente eguale alla 2.

2.° Armatura ordinaria con due saettoni, monaco e catena, che, per generalità, supporremo in due tratte (fig. 41.*).

Supponendo per brevità che il saettone CE divida il puntone AB in due parti come 3:2, chiameremo $6P$ il peso uniformemente ripartito da A in E e $4P$ quello da E in B : (simmetricamente, s' intende, dall'altra parte). Allora in E verrà un peso eguale a $3P + 2P = 5P$; in B un peso eguale a $4P$ e le reazioni degli appoggi risulteranno ciascheduna eguale a $7P$. Prendendo allora $ac = 7P$ si avrà in cad il poligono delle forze pel vertice A , dal quale si ricaveranno la compressione 1 e la tensione 2. Fatto poi $ab = 5P$ si potrà disegnare il poligono $badeb$ nel quale sarà de eguale alla compressione 3 ed eb eguale alla compressione 4. Così pel vertice C si avrà il poligono $cdefgc$, in cui ef è eguale ad ed e parallelo al saettone CF ; fg è eguale a de e parallelo a CD ; l'ultimo lato gc rappresenterà la tensione 5.

3.° Armatura simile alla precedente in cui i due saettoni sono disposti orizzontalmente a guisa di catena (fig. 42.*).

Supponendo $AE = EB$ e chiamando con $2P$ il peso caricato in E si avranno per gli sforzi esterni corrispondenti ai varj vertici i valori scritti nella figura. Essendo allora $ac = 3P$, si avrà in ad la compressione 1 e in de la tensione 2. Fatto poi $ab = 2P$ si avrà il poligono $badeb$ in cui de rappresenterà la compressione 3 ed eb la compressione 4. Evidentemente gli sforzi 6, 7, 8, 9 saranno rispettivamente eguali agli sforzi 4, 3, 2, 1. Quanto alla tensione 5 essa può ottenersi facilmente osservando che le pressioni 3 e 7 intorno al vertice C , essendo eguali fra loro, si fanno da sè equilibrio e che quindi la 5 sarà la risultante delle tensioni 2 e 8; per conseguenza essa sarà rappresentata in fc nel triangolo cdf . Altrimenti essa avrebbe potuto essere determinata costruendo il poligono delle forze intorno al vertice B , dal quale sarebbe riuscita eguale alla risultante delle compressioni 4 e 6 meno il peso $2P$.

Qualora si omettesse il tirante BC il sistema non potrebbe più stare in equilibrio, a meno che non si tenesse calcolo della rigidità della connessione in B e della resistenza propria alla flessione del pezzo EF .

4.ª Armatura detta alla Polonceau (fig. 43.ª).

Supponendo $AF = FB$ gli sforzi esterni verranno distribuiti come nell'esempio precedente. Facendo adunque $ac = 3P$ si avranno dapprima nel solito triangolo adc la compressione 1 e la tensione 2. Essendo poi $ab = 2P$ si avrà il poligono $badeb$ in cui de sarà la compressione 3 ed eb la compressione 4. Passando finalmente a considerare il vertice C si otterrà il poligono $cdefc$, nel quale sarà ef la tensione 6 e fc la tensione 5. Per l'altra metà dell'armatura si ripeteranno evidentemente gli stessi sforzi.

5.ª Armatura a sistema triangolare (usata molto dagli Inglesi) (fig. 44.ª).

Essendo sempre $AE = EF = FG = GB$ ecc. e $2P$ il peso ripartito su ciascuna parte di puntone si avranno le pressioni

sopra ciascun vertice eguali a $2P$ e le reazioni degli appoggi A e D eguali ciascheduna a $7P$. Come pei casi precedenti si avrà allora nel triangolo efg , $af = 1$; $fe = 2$. Pel vertice E poi si avrà il poligono $bagfb$ dal quale si otterrà in fg la compressione 3 in gb la compressione 4. Pel vertice L si avrà il poligono $efghe$ nel quale $gh = 5$, $he = 6$. Così pel vertice F il poligono delle forze sarà $cbghic$ in cui $hi = 7$, $ic = 8$. In seguito si passa al vertice M e si ottiene il poligono $ehike$ in cui $ik = 9$, $ke = 10$. Passando poi al vertice G , si avranno nel poligono $dckld$ le compressioni 11 e 12. Finalmente dall'esame del vertice C si ricaverebbe la tensione 13. Del resto essa, dovendo essere eguale alla risultante delle compressioni 12 e 14 (eguali fra loro) meno lo sforzo esterno $2P$, si avrà la metà della medesima in em .

6.^a Armatura a reticolato triangolare detta a falce (fig. 45.^a).

Questa armatura, che si può impiegare ogni volta che le esigenze estetiche della sala da coprirsi od altre ragioni non permettono l'uso della catena al modo ordinario, si compone di due poligoni, l'uno superiore che lavora per compressione, l'altro inferiore che lavora per trazione; i due poligoni sono poi collegati fra loro mediante aste, le quali lavorano alcune per compressione, altre per trazione a seconda del modo con cui il peso è distribuito; l'azione di queste aste riesce poi quasi nulla quando il tutto sia equilibrato. Supponendo che il poligono esterno sopporti direttamente la copertura ed i carichi accidentali corrispondenti, ed essendo i lati del poligono fra di loro eguali, si noterà che il peso dovuto alla neve (che si valuta dai 20 ai 25 chilogrammi per metro quadrato) sarà massimo pel lato DE orizzontale ed andrà decrescendo fino ad essere pressochè nullo pei lati AB e GH sui quali la neve stessa difficilmente potrà rimanere. Perciò gli sforzi P_1, P_2, P_3 corrispondenti ai varj vertici non saranno a rigore eguali fra loro, ma sarà $P_3 > P_2 > P_1$. Ciò posto, applicando a ciaschedun vertice dell'armatura le solite costruzioni, si avrà

Pel vertice *A* il triangolo *aed* da cui la compressione 1 e la trazione 2.

Pel vertice *B* il poligono *baefb* da cui la tensione 3 e la compressione 4.

Pel vertice *I* il poligono *defgd*, da cui la compressione 5 e la tensione 6.

Pel vertice *C* il poligono *cbfgbc* da cui la tensione 7 e la compressione 8, ecc.

Nello stesso modo continuando si verrebbero a trovare le diverse tensioni e compressioni, come del resto mostra abbastanza chiaramente la figura.

Prima di abbandonare quest'argomento ed allo scopo di mostrare, come i risultati ottenuti colle costruzioni grafiche sopra accennate si accordino in pratica con quelli che si avrebbero dai calcoli più esatti, daremo nella fig. 46.^a un esempio pratico, applicando il metodo che abbiamo esposto allo studio di una armatura in ferro per la portata di 20 metri, della quale trovansi i calcoli ed i dettagli di costruzione nel *Propagateur des travaux en fer*, fascicolo del marzo 1868. Questa armatura del tipo già da noi presentato nell'esempio IV, è calcolata per sopportare una copertura di zinco, il peso della quale, compresi i sopraccarichi accidentali per neve e vento, si calcola di chilogrammi 51 per metro quadrato. Essendo poi le armature distanti fra loro di m.¹ 5,00, il carico da considerarsi come uniformemente distribuito su ciascun metro di puntone sarà come segue:

Copertura e sopraccarichi 51. ^{ch.} × 5 = ch. ¹ 255	
Tempiali »	36
Puntoni, tiranti, ecc. »	53
	TOTALE ch. ¹ 344

poniamo chilogrammi 345.

Inoltre, essendo $AD = DC : 5,386$ ne verranno le pressioni in D, C, E ciascheduna di chilogrammi $344 \times 5,386 =$ chilogrammi 1860, e le reazioni in A e B saranno ciascheduna di chilogrammi $1860 + 930 =$ chilogrammi 2790.

Ciò posto, applicando il metodo grafico sopra dimostrato, si verrà a trovare:

- 1.° Compressione lungo $AD =$ chil. 11 050
- 2.° Tensione lungo $AF =$ » 10 350
- 3.° Compressione lungo $DC =$ » 10 340
- 4.° Tensione lungo $FC =$ » 4 850
- 5.° Tensione della catena $FH =$ » 5 675
- 6.° Compr. del saettone $DF =$ » 1 730

Ora le dimensioni fissate pei corrispondenti pezzi dall'ingegnere Mathieu, autore dello studio in questione, partendo da calcoli più rigorosi e supponendo il puntone AC come una trave unica appoggiata in tre punti, sarebbero le seguenti:

Puntone ADC : La sua sezione trasversale ha la forma detta a doppio T con un'altezza di 200 mm., una larghezza in testa di 62 mm. e uno spessore nell'anima o gambo di mm. 5.

L'area della sezione di questo ferro è di circa mm. q. 3000

Il tirante AF è un ferro tondo del diametro di mm. 43 ed ha quindi una sezione di » » 1452

Il tirante FC ha un diametro di mm. 31 e quindi una sezione di » » 754

La catena FH ha le stesse dimensioni del sopradetto tirante FC » » 754

Finalmente il saettone FD è in ghisa e nella sua parte centrale esso è a sezione cruciforme ed a profilo longitudinale parabolico onde meglio opporsi alle inflessioni, che casuali sforzi obliqui gli potrebbero comunicare. La sua sezione minima, che ha luogo verso i due estremi, è di . . » » 1963

Quanto al tirante o monaco CH , esso non è destinato che ad impedire l'inflessione della catena orizzontale sotto il suo proprio peso ed a mantenere meglio collegata questa col colmo dell'armatura; esso quindi non fa propriamente parte del pignone articolato del quale ci occupiamo.

Confrontando ora le sezioni qui riportate cogli sforzi, che abbiamo desunto dal calcolo grafico, vediamo di dedurre quanti chilogrammi di trazione o di compressione sopporterebbero i varj pezzi per millimetro quadrato di sezione o, come si suol dire, il *coefficiente di resistenza* alla trazione o alla compressione che risulterebbe.

Per ottenere ciò basterà dividere gli sforzi in chilogrammi per le rispettive sezioni, e si avranno i seguenti risultati:

$$1.^{\circ} \text{Puntoni} = \frac{11050}{3000} \text{ chilogrammi } 3.68$$

$$2.^{\circ} \text{Tirante } AF = \frac{10350}{1452} \quad \text{»} \quad 7.11$$

$$3.^{\circ} \quad \text{»} \quad FC = \frac{4850}{754} \quad \text{»} \quad 6.43$$

$$4.^{\circ} \text{Catena } FH = \frac{5675}{754} \quad \text{»} \quad 7.50$$

$$5.^{\circ} \text{Sacttone } FD = \frac{1730}{1963} \quad \text{»} \quad 0.88$$

Eccettuando i puntoni ed i saettoni noi vediamo che il coefficiente di resistenza del ferro starebbe fra 6.th 43 e 7.th 50 per millimetro quadrato, coefficiente che si accorda perfettamente con quello addottato in pratica (vedi nota alla pag. 107) e del quale fece uso nei suoi calcoli il già citato ingegnere.

Quanto ai saettoni, benchè essi non siano in realtà sottoposti

che ad una compressione a seconda del loro asse, e benchè la resistenza normale della ghisa alla compressione si possa ritenere da 4 a 5 chilogrammi per millimetro quadrato anche per sforzi continui, nondimeno, essendo la lunghezza del saetton più di 10 volte il suo diametro, l'esperienza ha dimostrato che anche una semplice compressione tende ad inflettere il pezzo, nel qual caso nella sezione di mezzo (che sarebbe qui la più pericolosa) solo parte delle particelle materiali della medesima potrebbero esercitare efficacemente la loro azione resistente; dimodochè, a meno di non dare al pezzo una forma tale che la sezione di mezzo ne venga convenientemente ingrossata, in modo da resistere al momento di flessione ora accennato, è necessario tener calcolo di questo possibile piegamento, il che si può fare approssimativamente riducendo il coefficiente di resistenza ad $\frac{1}{2}$ od anche a $\frac{1}{3}$ del normale, a seconda che il pezzo è più lungo rispetto al lato più piccolo della sua sezione. Ad ogni modo però crediamo di poter osservare che nella determinazione delle dimensioni del pezzo in questione si è realmente abbondato; giacchè il coefficiente di resistenza in luogo di 0.th 88 avrebbe potuto essere portato con tutta sicurezza al doppio di questo valore.

Finalmente quanto ai puntoni, alle osservazioni già fatte pei saettoni, dobbiamo aggiungere che essi in fatto, oltre che allo sforzo di compressione, sono soggetti ad uno sforzo che tende ad infletterli, dovuto al peso uniformemente ripartito sulla tratta libera dei medesimi. Il momento massimo di questa forza tendente a piegare il puntone sarebbe eguale alla metà della componente del peso suddetto moltiplicato per la metà della lunghezza libera dello stesso puntone¹, il quale per conseguenza dovrebbe avere una forma ed una sezione tale da resi-

¹ Considerando il puntone come un pezzo unico appoggiato in 3 punti il detto momento massimo verrebbe minore.

stere a questo momento di flessione. Non volendosi per altro ricorrere alle formole relative, del resto semplicissime e date in tutti i trattati dell'arte di costruire, potrà bastare pei casi ordinarij il ritenere il coefficiente di resistenza non superiore alla metà del normale pel ferro, supposto che si scelgano le sezioni a doppio T , od altre che trovansi già in commercio calcolate per pezzi sottoposti a flessione. Nel caso poi in cui si facciano i puntoni in legno, pel quale non esistono forme speciali, il coefficiente di resistenza si dovrebbe in media ritenere di $\frac{1}{6}$ ad $\frac{1}{7}$ del normale, cioè di chilogrammi 10 per centimetro quadrato pel rovere, e ciò in vista anche della facilità con cui il legno potrebbe inflettersi in causa delle variazioni igrometriche.

Noi del resto ci siamo qui limitati a dare alcuni schiarimenti, che ci parvero necessari per la migliore intelligenza del modo di applicare il metodo grafico che abbiamo esposto, non essendo nostro compito di parlare della resistenza dei materiali, pel quale argomento rimandiamo i lettori alle opere speciali di costruzione.

A completare gli esempj, che ci siamo proposti di dare, resterebbe a far cenno delle travi dette *a reticolato*. Queste travi, che nacquero dal bisogno di attraversare grandi distanze, per le quali era indispensabile il comporre la trave con varj pezzi riuniti insieme, nonchè dal bisogno di togliere quell'aspetto pesante che presenterebbe una trave di grandi dimensioni tutta piena, si compongono in generale di due teste, l'una superiore, che lavora per compressione, l'altra inferiore, che lavora per trazione; le due teste poi sono riunite da varie barre inclinate formanti un reticolato talora rettangolare, talora triangolare, talora semplice, cioè ad una sola intersezione sull'altezza della trave, talora doppio, triplo ecc. Le barre inclinate del reticolato sono destinate a trasmettere le azioni di trazione e di compressione delle due teste e lavorano d'ordinario alternati-

vamente per trazione e per compressione. Oltre a ciò esse sono destinate a resistere allo sforzo detto di *taglio* dovuto al peso della trave, il quale tende a lacerare la trave facendo scorrere verticalmente le particelle della materia. Per dare un'idea del come si applicherebbe il metodo grafico, dimostrato, anche a questo genere di costruzioni, prenderemo a studiare come esempio, un ponte in ferro recentemente costruito nella ferrovia di Pensilvania negli Stati Uniti d'America e del quale ricaviamo i disegni ed i dati dal giornale *Engineering*, fascicolo del 27 novembre 1871, ove trovasi una breve descrizione del ponte stesso.

Questo ponte (fig. 47.) costruito in ferro e ghisa è in due travate indipendenti, ciascuna delle quali ha la lunghezza di metri 25.15 (82 piedi e 6 oncie). Essendo la ferrovia a due binarj, vi sono tre travi propriamente dette, che corrono parallelamente all'asse, due ai due fianchi ed una nel mezzo fra i due binarj. Ciascuna trave è composta:

1.° Di una catena inferiore formata di aste lunghe metri 4.19 articolate fra loro mediante buloni e che sopporta direttamente il peso della ferrovia e dei carichi corrispondenti.

2.° Di una testa di trave superiore, formata con varie barre riunite con placche di collegamento.

3.° Di barre inclinate formanti un reticolato triangolare.

4.° Di tiranti verticali destinati a trasmettere il peso della catena inferiore alla testa superiore e alle barre inclinate.

5.° Di due puntoni in ghisa, uno a ciascun estremo della trave, i quali sono assicurati alle placche di ghisa pel cui mezzo la trave si appoggia sopra una delle spalle da una parte e sulla pila di mezzo dall'altra. Onde lasciare poi libero agio alle dilatazioni del ferro una sola delle nominate placche di base è assicurata alla muratura, mentre l'altra vi si appoggia per mezzo di curli.

Oltre a tutto ciò devonsi aggiungere altri pezzi verticali in-

tercalati fra i tiranti nominati, ed il cui scopo è di sopportare il peso proprio delle varie tratte della testa superiore e di opporsi al piegamento della medesima, pezzi dei quali noi non ci occuperemo, non entrando essi propriamente nella composizione dei poligoni.

Il sopraccarico massimo che i costruttori fissarono nei loro calcoli è di circa 4020 chilogrammi (1 tonnellata e $\frac{1}{2}$ per piede) per ogni metro di binario, dimodochè ne verrebbe la metà, cioè chilogrammi 2160 per ogni metro delle due travi esterne, mentre per quella di mezzo si dovrebbe calcolare un sopraccarico per metro eguale a quello intero di un binario. Stimando poi il peso proprio per metro di una delle travi esterne di chilogrammi 540 (per arrotondare le cifre) si otterrà il peso totale, che supporremo uniformemente distribuito sulla trave stessa, di chilogrammi 3000 per metro corrente della medesima.

Ciò posto, essendo la lunghezza di ciascuna tratta della catena inferiore, come si è detto, di metri 4.19, il peso corrispondente sarà di chilogr. $3000 \times 4.19 =$ chilogr. 12570. Potendosi poi ritenere che questo peso venga sostenuto ai due estremi della barra della catena e al mezzo di essa, ove mette capo il tirante verticale, si otterranno gli sforzi esterni a ciascuno dei vertici *B, C, D, E, F* del poligono articolato, del quale supponiamo che si componga l'intera trave, eguali ciascuno a chilogrammi 6285.

Finalmente le reazioni dei due appoggi saranno ciascheduna eguali alla metà del peso totale della trave meno quella porzione di esso, che consideriamo come direttamente sostenuta dall'appoggio, e che è eguale alla metà dei chilogrammi 6285 ossia a chilogrammi 3142. Sarà allora una di dette reazioni equivalente a chilogrammi $6285 \times 6 = 3142$, che, per arrotondare la cifra, noi supporremo di chilogrammi 35000. Con ciò possiamo applicare ai vertici *A, B, C, D, E, F* del poligono articolato le solite costruzioni grafiche. Prendendo quindi *a c*

(fig. 50.^a) eguale a chilogrammi 35000 (scala di 2 centimetri per 10 000 chil.) si condurranno le ab , cb parallele al puntone AB ed alla catena AC e si otterrà la compressione del puntone e la trazione della catena. Indi, preso $a1 = \text{chil. } 6285$ si formerà il poligono $1abd1$ in cui bd sarà la tensione del tirante BC e $d1$ sarà la compressione della testa BD . Per assicurarci poi che la bd è una tensione e non una compressione non avremo che a percorrere il contorno del poligono $1abd1$ sopra accennato, e troveremo che lo sforzo esterno essendovi preso da 1 in a , cioè in senso opposto, gli sforzi interni verranno rappresentati nel senso delle azioni dirette prodotte dallo sforzo esterno. Infatti noi troviamo la compressione del puntone AB da a in b , cioè nel senso vero dello sforzo comprimente, non della reazione; allora lo sforzo in questione, venendo da b in d , riesce appunto nel senso della trazione. Applicando queste osservazioni, che noi ci dispenseremo dal ripetere in ogni caso, si potrà sempre riconoscere sia la natura di uno sforzo già disegnato, sia il senso in cui va preso uno sforzo dato da disegnarsi. — Proseguendo allora il nostro esame noi troveremo pel vertice C il poligono $2cbdf2$ dove $2c$ è eguale ai soliti chilogrammi 6285, df è la compressione del tirante CD ed $f2$ la tensione della catena CE . Così pel vertice D si avrà il poligono $31dfh3$ in cui fh è la tensione lungo DE ; $h3$ la compressione lungo DF . Pel vertice E si otterrà il poligono $42fh14$ in cui $h1$ è la compressione della spranga EF ; 14 la tensione della catena da E in G . Finalmente, passando al vertice F , si avrà il poligono $53h1m5$, in cui $1m$ sarà la compressione massima della testa della trave: $m5$ la tensione della barra FG . Misurando ora colla scala sopra accennata i varj sforzi trovati si otterrà quanto segue:

- 1.^o Tensione AC = chil. 29 500
 2.^o " CE = " 72 000

3. ^o	Tensione EG	= chil. 93 500
4. ^o	Compressione del puntone AB = »	46 000
5. ^o	» della testa BD	= » 53 500
6. ^o	» » DF	= » 85 500
7. ^o	» » FH	= » 96 200
8. ^o	Tensione della spranga BC . . = »	37 500
9. ^o	» » DE . . = »	21 000
10. ^o	» » FG . . = »	4 200
11. ^o	Compressione » CD . . = »	29 000
12. ^o	» » EF . . = »	12 500

Passando poi oltre la mezzaria della trave, si riprodurrebbero simmetricamente gli stessi sforzi: le barre inclinate si scambierebbero le funzioni, vale a dire diverrebbero compresse quelle dirette da sinistra a destra.

Volendo ora calcolare le sezioni che dovrebbero avere i varj pezzi del sistema per resistere convenientemente agli sforzi sopra trovati non si avrebbe che a dividere gli sforzi stessi pel coefficiente di resistenza adottato, fatte le osservazioni già accennate nell'esempio precedente pel caso della compressione.

Nel ponte, del quale ci occupiamo, gli ingegneri che lo progettaron ritennero come coefficiente di resistenza del ferro alla trazione chilogrammi 7.50 circa per millimetro quadrato e chilogrammi 4.50 per la compressione e per prismi corti, pei quali, cioè non si abbia a tener calcolo della flessione. Osservando poi che nei varj pezzi che compongono la trave, della quale ci occupiamo, la lunghezza non supera di molto le dieci volte il lato più piccolo della sezione, potremo ritenere in media approssimativamente il coefficiente di resistenza alla compressione di chilogrammi 4,00 per millimetro quadrato. Ciò posto noi otterremo le seguenti sezioni:

$$1.^{\circ} \text{ Catena } A C: \frac{\text{ch. } 29500}{7.50} \text{ millimetri quadrati } 3930$$

2. ^o	Catena CE :	$\frac{\text{ch. } 72000}{7.50}$	millimetri quadrati	9690
3. ^o	» EG :	$\frac{\text{ch. } 93500}{7.50}$	»	» 12450
4. ^o	Testa BD :	$\frac{\text{ch. } 53500}{4.00}$	»	» 13375
5. ^o	» DF :	$\frac{\text{ch. } 85500}{4.00}$	»	» 21375
6. ^o	» FH :	$\frac{\text{ch. } 96200}{4.00}$	»	» 24050
7. ^o	Spranga BC :	$\frac{\text{ch. } 37500}{7.50}$	»	» 5000
8. ^o	» DE :	$\frac{\text{ch. } 21000}{7.50}$	»	» 2800
9. ^o	» FG :	$\frac{\text{ch. } 4200}{7.50}$	»	» 560
10. ^o	» CD :	$\frac{\text{ch. } 29000}{4.00}$	»	» 7250
11. ^o	» EF :	$\frac{\text{ch. } 12500}{4.00}$	»	» 3125

Quanto al puntone AB , il quale è di ghisa e vuoto nel mezzo, noi potremo ritenere con sufficiente sicurezza il coefficiente di resistenza alla compressione di chilogrammi 2.5; dimodochè avremo per la sezione di questo pezzo:

$$\frac{\text{ch. } 46000}{2.50} = \text{millimetri quadrati } 18400$$

Ora, dal summentovato articolo del giornale inglese, rica-

viamo i seguenti dati sulle dimensioni adottate dai costruttori pei varj pezzi, cioè:

1.^a La catena inferiore è composta di spranghe dell'altezza di millimetri 178 e di vario spessore, riunite a fasci di 4 ciascuno nel modo indicato nella fig. 48^a. Allora dividendo la superficie di millimetri quadrati 3930 che corrisponderebbe alla prima tratta della catena per l'altezza di millimetri 178 si avrà la grossezza complessiva delle 4 spranghe di millimetri 22,5, ossia per ciascuna spranga circa millimetri 6. Per la seconda tratta dividendo la sezione di millimetri quadrati 9600 per 178 si avrà la sopraddetta grossezza complessiva di millimetri 54 e la grossezza di ciascuna spranga di millimetri 13.5. Per la terza tratta si avrà del pari

$$\frac{\text{mill. quadr. } 12450}{\text{mill. } 178 \times 4} = \text{millimetri } 17,5.$$

2.^a La testa superiore della trave è composta di 4 ferri della sezione indicata nella fig. 49.^a riuniti fra loro con placche di lamiera e con bulloni, che li attraversano; i detti ferri poi sono, dove occorre, rinforzati nei loro flanchi con placche bullonate sui medesimi. L'altezza di ciascuno dei ferri nominati è di millimetri 229 (9 oncie); la sezione allora dei medesimi si può ritenere di circa millimetri quadrati 4000 per ciascheduna e per conseguenza per 4 essa sarà di millimetri quadrati 16000. Aggiungendo ora a questa sezione quella delle lamiere di collegamento ed ammettendo che la grossezza delle medesime sia di millimetri 7 e la loro larghezza (in base al disegno) di circa millimetri 500, si avrà la sezione complessiva delle due lamiere di millimetri quadrati 7000. Aggiungeremo finalmente la sezione delle 6 piastre di rinforzo calcolate ciascheduna di millimetri 7 per millimetri 143, sezione che risulterà comples-

sivamente di millimetri quadrati 6090. Noi avremo con ciò la sezione massima della testa superiore come segue:

N. 4. Ferri a doppio T	= mill. quadr.	16000
» 2. Lamiere di collegamento	»	7000
» 6. Placche di rinforzo	»	6090

Sezione totale mill. quadr. 29090

Se ora leviamo da questa sezione quella dei fori corrispondenti ai varj bulloni, noi troveremo che essa coincide abbastanza esattamente con quella di millimetri quadrati 24050 desunta dalle nostre calcolazioni.

Un calcolo analogo di confronto si potrebbe stabilire per le barre inclinate e pei tiranti verticali, il che ommettiamo per brevità. Quanto ai puntoni di ghisa, essi sono costituiti di due pezzi o colonne per ciascuno, binate nel senso della larghezza del ponte. La loro sezione esterna è un ottagono col diametro di metri 0.170 e la sezione interna corrispondente al vuoto è un circolo; lo spessore del metallo è di circa millimetri 20. Si avrà allora la superficie del detto ottagono eguale a millimetri quadrati 23950. Essendo poi il raggio del circolo interno di millimetri 65, la sua superficie sarà di millimetri quadrati 13300 e la sezione solida di una colonna componente il puntone sarà allora di millimetri quadrati $23950 - 13300 =$ millimetri quadrati 10650 e la sezione totale del puntone sarà di millimetri quadrati $10650 \times 2 =$ millimetri quadrati 21300, sezione non troppo superiore a quella che era risultata dai nostri calcoli.

Gli sforzi sopportati dalla testa superiore e dalla catena inferiore della trave nelle varie posizioni della medesima e che noi abbiamo ora determinato supponendo la trave stessa un poligono articolato, possono essere trovati del pari graficamente partendo da altre considerazioni. Infatti, se noi consideriamo

la trave intera come un solido appoggiato a due estremi e caricato da un peso uniforme, noi abbiamo già visto (Cap. VII) come si possa facilmente determinare la curva parabolica, la quale somministra il momento risultante, rispetto ad un punto qualunque della trave, del peso della medesima che trovasi tanto a destra, che a sinistra di quel punto. Questa curva si è appunto tracciata nella fig. 51.^a, nella quale, per comodità del disegno, si è presa la distanza h eguale a 3 unità di lunghezza, essendo poi l'unità per gli sforzi come prima di millimetri 20 per 10 000 chilogrammi; con ciò le ordinate alla curva parabolica misurate colla scala sopraddetta degli sforzi e moltiplicate per 3 daranno in chilogrammetri i *momenti di flessione* della trave nelle varie sue posizioni. Ora, se noi prescindiamo dalle barre componenti il reticolato della trave e la consideriamo quindi composta semplicemente della testa superiore e della catena inferiore, è facile l'intendere che lo sforzo esterno tendente ad inflettere la trave darà luogo in essa ad una coppia in cui li due sforzi eguali e contrarj saranno la compressione della testa superiore e la tensione della catena inferiore. Considerando questi due sforzi come applicati nel l'asse della catena e della testa, ed essendo la distanza di questi assi, ossia l'altezza della trave, di metri 2.52, il prodotto di uno di questi sforzi eguali per metri 2.52 darà il momento di questa coppia o, in altri termini, il *momento di resistenza* della trave. Ma, perchè abbia luogo l'equilibrio, il momento di resistenza suddetto dovrà essere in ogni punto della trave eguale almeno al corrispondente momento di flessione. Ora, se noi misuriamo, nel modo sopra accennato, il detto momento di flessione in chilogrammetri e dividiamo quel numero per 2.52 (l'altezza della trave essendo la stessa dappertutto, fatta astrazione dalle due tratte corrispondenti ai puntoni), noi dovremo trovare per quoto lo sforzo di compressione o di trazione che sopporteranno in quel punto la testa della trave o la

catena, sforzo che dovrà essere eguale a quello già determinato col calcolo precedente, salva la necessaria tolleranza.

Infatti, misurando il momento massimo sulla fig. 51.^a, troviamo che esso è eguale a chilogrammetri 231 750, il quale, diviso per 2.52 dà lo sforzo massimo di compressione o di trazione di chilogrammi 92 000 numero che, messo a confronto con quello già trovato per la massima tensione della catena di chilogrammi 93 500 vi si accorda abbastanza bene. Analogamente si potrebbero controllare le tensioni della catena, come anche le compressioni della testa superiore in tutte le posizioni intermedie. — Se ora noi dividiamo, per esempio, la massima trazione di chilogrammi 92 000 ora trovata per chilogrammi 7.50 troveremo, come prima, la sezione che deve avere la catena in quella posizione eguale a millimetri quadrati 12 270.

Supponendo che la stessa sezione sia rappresentata dalla stessa retta mm' nella fig. 51.^a, ed essendo questa retta lunga millimetri 77 ne verrà che un millimetro di questa retta rappresenterà 139 millimetri quadrati della sezione della catena suddetta, ossia che millimetri 6.28 rappresenteranno 1000 millimetri quadrati della sezione stessa. Disegnata allora una scala su questa base (come si vede nella figura), noi potremo con questa scala dalla semplice misura delle ordinate della parabola desumere la sezione corrispondente della catena. Il poligono che nella figura trovasi disegnato esternamente alla parabola, rappresenterebbe nella suddetta scala appunto queste sezioni, nel supposto che esse rimangano costanti per una lunghezza corrispondente a ciascuna tratta della catena medesima. Analogamente, prendendo il coefficiente di resistenza di 4 chilogrammi in luogo che di chilogrammi 7.50, si comporrà l'altra scala, colla quale, sulla stessa figura, si potranno direttamente misurare le sezioni da darsi alla testa superiore.

Il poligono ora accennato e che noi abbiamo circoscritto alla parabola in modo che tutti i suoi vertici rimangano esterni alla

medesima, dà, specialmente per le prime tratte della catena, delle sezioni alquanto superiori a quelle che avevamo calcolate col sistema dei poligoni articolati. Ciò avviene perchè qui, avendo supposto la trave di un solo pezzo, le tensioni della catena come le compressioni della testa superiore andrebbero crescendo continuamente andando verso il mezzo del ponte; dimodochè, non volendo che in alcun punto il metallo lavorasse sotto uno sforzo maggiore del prescritto, converrebbe proporzionare ciascun pezzo per resistere alla tensione o compressione massima. Nel caso nostro in cui la catena è realmente un poligono articolato, potremmo asserire che sono più vicini al vero i primi risultati: nella pratica però converrà in generale attenersi ai risultati del secondo metodo.

Noi vediamo adunque con quanta facilità e con quanta evidenza, senza ricorrere a calcoli laboriosi e non alla portata di tutti, si possano determinare o verificare le dimensioni di molte opere di principale importanza nelle costruzioni con una approssimazione che, impiegando i dovuti criterj, è sempre sufficiente nella pratica. Ben lungi del resto dal pretendere in alcun modo d'aver fatto con questi pochi esempj dei nostri lettori altrettanti ingegneri, speriamo però che essi possano bastare per mettere sulla via coloro che si occupano di costruzione, i quali, acquistando pratica nell'impiego di questi sistemi, vi troveranno grandissimo vantaggio nella più parte dei casi. Che se poi alle costruzioni grafiche si associerà quale ausiliario il regolo logaritmico nell'eseguire tutte le calcolazioni numeriche occorrenti, nel trovare i rapporti delle scale, ecc. noi possiamo assicurare che il calcolo dei progetti e dei loro preventivi diverrà un'operazione affatto semplice e spedita.

Prima di dar termine a questo capitolo aggiungeremo pochi altri esempj, i quali varranno a dare un'idea del come possano le stesse costruzioni grafiche essere applicate allo studio delle varie parti di una macchina. Noi ci proporremo perciò i seguenti problemi:

I. *Determinare le pressioni esercitate sopra due cuscinetti d'appoggio da un albero di trasmissione, il quale trovasi caricato da pesi perpendicolarmente al suo asse.*

Supponiamo prima di tutto (fig. 52.*.) che i pesi P' e P'' di cui è caricato l'albero siano collocati fra i due cuscinetti A e B . Costrutto allora il poligono funicolare $a I H I I I a$ e conducendo la Ox parallela all'ultimo lato $a I H$ si avrà in ax la pressione sul cuscinetto A e in $x2$ la pressione sul cuscinetto B (vedi Cap. VI).

Supponiamo ora che uno dei pesi sia collocato al di fuori dei cuscinetti; vale a dire sia, per esempio, il peso P'' collocato in D (fig. 53.*). Prendendo allora $a1$ ed $1, 2$ equivalenti agli sforzi P' e P'' e disegnando il poligono funicolare $a I H I I I a$ potranno avvenire tre casi, cioè: 1.° La parallela condotta da 0 al lato $I H I I a$ incontra la $a2$ fra a e 2 , ed allora si avrà come nel primo esempio in ax la pressione sopra A e in $x2$ la pressione sopra B . 2.° La detta parallela incontra la $a2$ sul prolungamento della medesima, come avverrebbe per il poligono $a I H I H' a$, ed allora la pressione ax diventa negativa, vale a dire il cuscinetto A viene premuto dal basso all'alto. 3.° Finalmente la Ox coincide colla Oa ed allora vuol dire che il cuscinetto A non riceve alcuna pressione, tanto che potrebbe anche essere tolto senza che ne venga disturbato l'equilibrio. In tutti questi casi il poligono funicolare $a I H I I I a$ darà i momenti dei pesi P' e P'' nelle varie posizioni dell'albero, e con esso si potrà facilmente trovare la forma che converrebbe dare all'albero, onde, nelle sue varie sezioni, presenti una conveniente resistenza alla flessione.

II. *Trovare le pressioni esercitate sui due cuscinetti quando sull'albero agiscono sforzi obliqui al medesimo (fig. 54.*).*

Facendo $a1$ parallela ed eguale al carico obliquo P e costruendo il poligono funicolare (qui un triangolo qualunque) $a I H a$: indi conducendo la Ox parallela ad $a I I$ si avranno le

componenti $a x$, $x 1$ le quali proiettate in $a b$, $c 1$ sopra perpendicolari all'asse $A B$ daranno le pressioni sopportate in A e B . — Se poi si traccia il triangolo $I I' H'$ e si conduce da O la parallela a $I H'$ e si proiettano le componenti che si ottengono come precedentemente, si avranno le pressioni, le quali si verificheranno in d e in e . Le componenti poi di queste pressioni parallele all'asse daranno gli sforzi esercitati contro i collari destinati a tener registrato l'albero.

III. *Determinare le pressioni come nei precedenti problemi supposto che il carico o sforzo esterno agisca parallelamente all'asse (fig. 55.):*

In questo caso hanno luogo due coppie, l'una costituita dallo sforzo esterno P e dalla corrispondente reazione del mozzo della ruota o disco qualsiasi, l'altra formata dalle due reazioni eguali e contrarie, che si svilupperanno sui due perni. Ora, il momento della prima coppia sarà il prodotto di P per la distanza $M N$ del medesimo dall'asse. Il momento dell'altra coppia sarà eguale al prodotto di una delle nominate reazioni eguali e contrarie dei perni per la distanza dei perni stessi. Perchè vi sia poi l'equilibrio, il momento di questa seconda coppia dovrà essere eguale a quella della prima: dimodochè non essendo qui incognito altro che lo sforzo esercitato sul perno, sarà facilissimo il determinarlo anche numericamente; poichè, chiamando X questo sforzo, si dovrà avere

$$X \times A B = P \times M N$$

e quindi

$$X = \frac{P \times M N}{A B}.$$

Del resto per trovare questo valore di X graficamente non si avrà che ad unire il punto b (incontro della direzione di P colla normale all'asse passante per B) col punto A di mezzo dell'altro perno: portare da b in p lo sforzo esterno P ; condurre

la pc parallela a Bb , e questa sarà eguale allo sforzo X , ciò che si dimostrerebbe facilmente considerando i triangoli simili bpc , ABb . Si faccia ora la aI eguale a questo sforzo X ossia a pc e si conducano le aO , IO qualunque, indi lea III , aI parallele alle medesime ed inoltre la $I II$ parallela ad $a III$ ed il lato $II III$ che chiude il poligono funicolare $a I II III$; si conduca poi la $O 2$ parallela a quest'ultimo lato. Saranno $1, 2$ e $2, 1$ gli sforzi eguali e contrarj che operano sui due bordi del mozzo della ruota o disco MN , e finalmente il poligono funicolare $a I II III$ rappresenterà il *piano dei momenti* nelle diverse posizioni dell'albero.

IV. Determinare le varie spinte o pressioni orizzontali e verticali, che si verificano nei varj punti di una gru (macchina per elevare pesi e trasportarli orizzontalmente (fig. 56.^a, 56.^a (a), 57.^a).

Supponiamo la gru della forma di quella rappresentata nella fig. 56.^a, vale a dire coll'albero verticale solidamente assicurato in basso ad una piattaforma orizzontale ed in alto libero. Noi qui dovremo considerare dapprima il peso proprio della gru, la cui direzione verticale passerà pel centro di gravità G della medesima, poi il peso che la gru solleva e che sta sospeso alla stessa in P . Questi due pesi avranno un risultante R , che sarà eguale alla loro somma, e la cui posizione supporremo già trovata colle solite regole. Questo peso risultante R darà luogo a due componenti passanti per E e per F , componenti che troveremo al solito modo mediante il poligono funicolare $a I II$ e il poligono delle forze $a O 1 2$, e sarà precisamente $1a$ lo sforzo componente che passa per F , $a 2$ quello che passa per E , essendo $2, 1$ eguale al peso risultante R . Ora, per determinare le spinte che il peso R determinerà nei punti A, B, C, D dell'albero verticale della gru, osserviamo che quest'albero può considerarsi, come quello dell'esempio precedente, caricato parallelamente al suo asse. Per rendere allora più chiara la

figura, facciamo nella fig. 56.* (a) uno schema della fig. 56.* (le stesse lettere indicative corrispondono agli stessi punti nelle due figure). Essendo allora Aa eguale alla distanza di A dalla R nella fig. 56.*, si prenda ap eguale ad R e si conduca $p q$ fino all'incontro della $a B$: questa $p q$ rappresenterà le spinte eguali e contrarie che hanno luogo in A e B (vedi l'esempio precedente). Ora, dal punto F (corrispondente al punto F della fig. 56) si conduca $F l$ eguale alla componente del peso R passante per F ; indi si conduca la $l h$ fino all'incontro della $F D$... e sarà $l h$ eguale agli sforzi P_3 e P_4 eguali e contrarij, che hanno luogo in C e in D . Trovati questi sforzi, si potrà disegnare il poligono funicolare $a I H H$, il quale sarà il *piano dei momenti* per l'albero verticale $A C D$ (vedi esempio precedente). Osserviamo finalmente che il punto A della gru, oltre alla spinta orizzontale, che abbiamo ora trovata, sopporta tutto il peso R . Determinando allora la risultante R' delle pressioni R e P' si avrà la direzione dello sforzo esterno, che sopporta il punto A , sforzo evidentemente obliquo rispetto all'asse. Analogamente, essendo Q la reazione verticale che avrà luogo in D , reazione, che sarà eguale ad R più il peso dell'albero verticale, si determinerà in grandezza e in direzione lo sforzo risultante P'_4 che opererà in D . Per ultimo, se noi prolunghiamo le direzioni di P' e P'_4 fino al loro incontro in G , avremo una controlleria dell'operato in ciò, che il punto G deve cadere sulla direzione della risultante delle due spinte P_2 e P_3 in B e in C ; poichè, riducendosi in tal caso l'intero sistema a tre sforzi, perchè questi si facciano equilibrio è necessario che le direzioni degli sforzi stessi passino per un solo punto (vedi Cap. VI).

Se la gru fosse della forma indicata nella fig. 57.*, vale a dire assicurata in A e in D a parti fisse, come lo sono per esempio quelle che si impiegano nelle fonderie, mediante costruzioni grafiche affatto analoghe, si troverebbero gli sforzi in A e in D , nonchè in B e in C . In fatti, essendo la mp ... la

direzione del peso risultante dal peso proprio della gru e dal carico addizionale, e facendo mp eguale a questo peso; indi conducendo la pn perpendicolare all'asse AD fino all'incontro della mD , sarà np eguale ad una delle spinte eguali e contrarie, che agiranno orizzontalmente in A e in D .

Analogamente conducendo la $m'C$, ed operando come precedentemente, si otterranno le spinte orizzontali e contrarie in B e C . Questi quattro sforzi così trovati daranno poi il poligono funicolare $a I II III$ che sarà il *piano dei momenti* per l'albero AD . L'essere questo poligono funicolare incrociato mostra che vi è un punto fra B e C in cui il momento delle varie forze è nullo, mentre al di sotto di quel punto il momento stesso ha un segno opposto che al di sopra, il che vuol dire che i varj sforzi esterni al di sotto di questo punto tendono a piegare l'albero in un senso, al di sopra del medesimo tendono a piegarlo in senso opposto. Finalmente, osservando che il perno inferiore D , oltre alla spinta orizzontale sopra trovata, sostiene il peso totale della gru e del suo carico, conoscendosi questo peso e la nominata spinta orizzontale, si determinerà nel modo ordinario in grandezza e direzione lo sforzo risultante obliquo che sostiene il perno stesso. Quanto agli sforzi di trazione e di pressione che eserciteranno in B e in C il tirante BE e il braccio CE , noi li potremmo trovare facilmente considerando il triangolo CBE come un poligono articolato.

CAPITOLO DECIMO.

RESISTENZE PASSIVE. URTO E SUOI EFFETTI. MISURA DELL'EFFETTO UTILE DI UNA MACCHINA.

Fin dal principio parlando della macchina d'Atwood noi abbiamo annesso, che i varj suoi pezzi non potevano muoversi senza consumare una certa quantità di forza motrice onde superare le *resistenze passive* a cui il loro movimento dava luogo. Vediamo ora quali sono queste che si dicono *resistenze passive*, che cosa sono, come si misura il loro effetto. Noi chiamiamo adunque col nome di *resistenze passive* quelle azioni, le quali si oppongono al movimento di un corpo in qualunque direzione esso avvenga, senza essere per sè capaci di determinare alcun movimento, e che si manifestano come conseguenza inevitabile del movimento stesso. — Una di tali resistenze, e possiamo dire anche la principale, è l'*attrito*, o resistenza proveniente dallo sfregamento. Per dare un'idea, comunque grossolana, dell'origine e della natura di questa resistenza, figuriamoci (fig. 58.*) due superfici a contatto, l'una *A* appartenga al corpo che si muove, l'altra *B* appartenga al corpo sul quale il primo si appoggia e che resta fermo, almeno per rispetto ad esso. Se le nominate superfici di contatto fossero piane o curve, ma perfettamente lisce ed unite, quali noi le concepiamo astrattamente in geometria, allora si potrebbe ammettere che il corpo *A*

si muovesse sul corpo *B* senza incontrare resistenza; ma invece questa natura astratta delle superfici è praticamente impossibile, essendo, come già abbiamo detto, i corpi null'altro che sistemi di particelle più o meno composte esse pure e distanti sempre fra loro di un certo intervallo.

Si intenderà allora che, per quanto si suppongano perfettamente levigate le superfici a contatto dei due corpi, vi saranno pur sempre questi intervalli fra le varie particelle materiali, intervalli più o meno sensibili o riconoscibili a seconda della natura dei corpi, ma che saranno sempre tali da dare alle superfici stesse un aspetto non dissimile da quello che, esagerando, abbiamo indicato nella figura. Ora, se le superfici sono così fatte, è evidente che il corpo *A* muovendosi sul corpo *B* dovrà innalzarsi ogni volta che una sporgenza della superficie di contatto del medesimo deve passare sopra una sporgenza della superficie d'appoggio. Ma per effettuare questo innalzamento occorre una quantità di forza motrice o di lavoro meccanico eguale al prodotto del peso del corpo *A* per l'altezza a cui lo dobbiamo elevare. Quando poi il corpo *A* stesso, superata quella sporgenza, torna a discendere, la potenza viva che esso acquisterebbe e che sarebbe eguale alla forza motrice stata impiegata nell'innalzamento, non viene più ad aiutare il movimento del corpo; ma, essendo essa in direzione normale a questo movimento, si estingue disperdendosi nelle molecole e negli atomi dei due corpi a contatto e dando invece origine a del calore (vedi l'Introduzione). Da questo esame, o, diremmo meglio, da questo abbozzo di esame che abbiamo fatto dei fenomeni che devono accompagnare il movimento di un corpo che striscia su di un altro, noi possiamo dedurre le seguenti conseguenze:

1.° Che ogni volta che un corpo *A* si muove sopra un corpo *B* vi è inevitabilmente una perdita di forza motrice ed uno sviluppo di calore;

2.° Che questa perdita di forza motrice dipende dalla natura delle superfici a contatto, cioè dal numero, dall'altezza e dalla disposizione delle sporgenze nominate, ed è proporzionale al peso del corpo che si muove o più esattamente alla pressione normalmente esercitata fra le due superfici qualunque poi sia l'estensione della superficie d'appoggio sulla quale questa pressione è ripartita.

Queste conclusioni si confermano perfettamente nella pratica; anzi l'esperienza le ha trovate indipendentemente da ogni teoria. La stessa esperienza ha trovato poi un altro fatto, ed è che l'attrito, ossia quello *sforzo locale* che è necessario per controbilanciare l'azione resistente del medesimo, è assai maggiore al primo muoversi quando i due corpi furono per qualche tempo a contatto, che non in seguito durante il movimento. La spiegazione di questo fenomeno è pure semplicissima.

Se noi infatti consideriamo il corpo *A* e il corpo *B* per qualche tempo a contatto, è facile l'intendere che ne nasceranno due effetti; il primo è che, in causa della pressione esercitata normalmente fra *A* e *B*, le sporgenze della superficie *A* si adatteranno più profondamente nelle cavità della superficie *B*; il secondo è che, in causa di questo maggiore avvicinamento delle due superfici, un certo numero di punti della superficie *A* verranno a sentire con una certa efficacia dell'azione attrattiva dei punti della superficie *B* e fors' anche a formare con essi un unico sistema; fenomeno cotesto, che è conosciuto in fisica sotto il nome di *adesione* e che si rende qualche volta assai sensibile con superfici molto lisce. Per l'una e per l'altra di queste cause è naturale adunque che la resistenza al primo distacco sia alquanto maggiore che poi. Andando ancora più in là col nostro ragionamento, noi verremmo poi facilmente a dedurre che, aumentandosi la velocità del corpo *A* per rispetto al corpo *B*, la resistenza locale dovuta all'attrito deve diminuire; poichè, per la ragione opposta di quella addotta prima,

con una grande velocità le sporgenze della superficie *A* non avranno tempo di addentrarsi tanto nelle cavità della *B*. Anche questo fatto è confermato dall'esperienza, benchè realmente fra i limiti delle velocità ordinarie esso non sia di molto sensibile. — Finalmente noi faremo un'altra importante osservazione. Noi abbiamo detto da principio che quando una sporgenza della superficie *A* deve superare una sporgenza della superficie *B*, il corpo *A* deve innalzarsi quanto occorre. Ora, la forza motrice agendo parallelamente al movimento, ne verrà che essa non potrà effettuare il necessario innalzamento del corpo *A*, senza che una componente della forza motrice impiegata venga distrutta contro quella specie di piano inclinato che la sporgenza di *A* dovrà seguire per portarsi sulla sporgenza di *B*. Questa frazione di forze motrice, che va distrutta, oltre che si aggrungerà alla causa già accennata da principio per sviluppare calore, agirà anche contro la coesione delle particelle componenti le nominate sporgenze delle superfici *A* e *B*, tendendo a staccarne le dette particelle; questa azione poi sarà tanto più energica quanto più sarà forte la pressione normale fra le superfici stesse ed anzi, aumentando questa pressione, vi sarà un limite oltre al quale potremo ritenere che gli innalzamenti accennati da principio non avranno quasi più luogo ed invece l'azione risultante si ridurrà ad un rapido logoramento delle superfici sfregantisi, logoramento che verrà sempre più aiutato dal riscaldamento delle dette superfici proveniente dal calore sviluppato per le già accennate cagioni. Tutto ciò avviene precisamente in pratica, e chiunque ha osservato delle parti di macchine, le quali abbiano sfregato per qualche tempo senza i dovuti riguardi, avrà potuto osservare come le loro superfici si presentino incise da profonde righe parallele al movimento.

Le accennate conseguenze dannose dell'attrito si diminuiscono coll'interporre fra le superfici sfregantisi delle sostanze, le quali siano atte a riempire le cavità delle superfici stesse e

quindi a renderle meglio uniformi. Tali sostanze sono d'ordinario gli olii od i grassi a seconda dei casi; per le macchine di precisione il migliore olio è quello di *spermaceti*, poi verrebbero alcuni olii d'ulivo espressamente fabbricati, i quali con minor prezzo ne raggiungono quasi la bontà; gli olii d'ulivo comuni in generale non possono servire per macchine delicate, perchè facilmente diventano vischiosi. I grassi solidi si adoperano invece di preferenza laddove l'olio non potrebbe essere convenientemente trattenuto, oppure dove esso consumerebbe troppo facilmente, come nei perni delle ruote delle vetture. Per il legno poi gli olii nè i grassi ordinarj non servono affatto; invece si possono adoperare il *sego*, la grafite od il sapone.

In tutte le macchine, e dovunque si abbiano movimenti continui, è della più grande importanza il curare che le superfici sfregantisi vengano sempre convenientemente fornite di sostanze spalmanti, poichè senza di esse, oltre ad un maggiore consumo di forza motrice, si avrebbe un forte logoramento delle superfici, e, anche con pressioni moderate, si raggiungerebbe facilmente quel limite, che abbiamo accennato, oltre al quale l'attrito cessa di essere proporzionale alla pressione.

Veniamo ora al modo di misurare l'attrito e la quantità di lavoro motore che esso assorbe. Come già abbiamo detto, noi intendiamo per *attrito* quello sforzo locale che sarebbe necessario per controbilanciare l'azione resistente del medesimo o meglio lo sforzo eguale e contrario che vi corrisponderebbe; ora noi abbiamo visto che, per una data natura delle superfici sfregantisi, questo sforzo è direttamente proporzionale alla pressione normalmente esercitata fra le medesime, ammesso che questa pressione non superi un conveniente limite e non tenendo conto della piccola diminuzione che avviene coll'aumentarsi della velocità. In tal caso adunque la misura dell'attrito viene ad essere una certa frazione della pressione normale, frazione variabile a seconda della natura e dello stato delle su-

perfici, e' che si chiama il *coefficiente d'attrito*. Questi coefficienti d'attrito vanno determinati coll'esperienza e si potrebbero trovare in due modi molto semplici. Il primo consiste nel porre il corpo da sperimentarsi (fig. 59.) sopra un piano orizzontale formato di quella materia contro la quale il corpo stesso deve sfregare. Al corpo *A* si immagini ora attaccata una funicella, la quale, mediante una carrucola di rinvio porti alla sua estremità un piattello su cui si possono mettere dei pesi. Mettendo allora i pesi opportuni sul piattello, si trovi quel punto, al quale corrisponde l'equilibrio del corpo *A*, dimodochè, dando una leggera spinta al medesimo, esso prenderebbe un moto uniforme¹. Sarà segno allora che i pesi posti sul piattello equivalgono precisamente a quello sforzo locale, che abbiamo detto, cioè all'attrito del corpo *A* sul piano, sul quale si muove. Dividendo allora questi pesi per il peso del corpo *A* si avrà il coefficiente d'attrito per quel caso.

Un secondo mezzo consiste nell'impiegare un piano inclinato così disposto che se ne possa facilmente variare e misurare l'inclinazione. Posto allora il corpo su questo piano e, fatto questo o almeno la parte di esso su cui il corpo deve muoversi della materia da sperimentarsi, si trovi quell'inclinazione del piano, alla quale corrisponde come prima l'equilibrio del corpo. In tal posizione dovrà essere la componente del peso parallela al piano precisamente eguale allo sforzo locale corrispondente all'attrito. Ora, essendo *AP* il peso del corpo (fig. 60.), sarà *AN* la componente suddetta e *PN* sarà la pressione normale, ed essendo *a* il numero dei gradi che misurano l'angolo del piano coll'orizzontale, si avrà

$$AN = PN \text{ tang. } a.$$

Dunque *tang. a* sarà appunto quel numero, pel quale si do-

¹ Supponiamo che si cerchi l'attrito durante il movimento.

vrà moltiplicare la pressione normale per avere l'attrito, ossia esso sarà il coefficiente d'attrito. Possiamo qui osservare che, se il corpo *A* fosse terra o sabbia l'angolo *a* darebbe l'inclinazione della scarpa secondo la quale quella terra o sabbia si disporrebbe naturalmente, inclinazione, che è necessario conoscere nei lavori di scavo o di riporto.

L'attrito del quale abbiamo parlato finora è quello detto di strisciamento o *radente*. Vi sarebbe un'altra maniera di attrito detto *volvente*, il quale ha luogo quando la superficie mobile *A*, invece di avere un movimento parallelo alla superficie *B*, si sviluppa su di essa, come avviene della periferia delle ruote di una vettura. Questo genere di attrito è anch'esso proporzionale alla pressione; ma è molto piccolo e perciò il più delle volte trascurabile. Esso poi non può dar luogo in generale a considerevole consumo delle superfici, e non può essere diminuito mediante le spalmature.

Nelle tabelle seguenti si troveranno registrati i coefficienti d'attrito per le sostanze più usate, quali risultarono dalle esperienze del signor Morin direttore del *Conservatoire des Arts et Métiers* a Parigi.

QUALITA' DELLE SUPERFICIE	DISPOSIZIONE delle fibre	STATO delle superficie	COEFFICIENTE d'attrito durante il movimento
Quercia sopra quercia	Parallele	Senza spalmatura	0,48
idem	"	Fregate con asp.*	0,16
idem	Perpendicolari	Senza spalmatura	0,34
idem	"	Bagnate	0,25
Ferro sopra rovere ..	Parallele	Senza spalmatura	0,62
idem	"	Bagnate	0,26
idem	"	Fregate con sapone secco	0,21
Cuojo conciato sopra rovere	Il cuojo a piatto	Senza spalmatura	0,30 a 0,36
idem	"	Bagnato	0,29
Correggia di cuojo sopra un tamburro di rovere	Perpendicolari	Senza spalmatura	0,27
idem sopra puleggia di ghisa	"	Secca o bagnata	0,15
Cuojo di bue per guarnitura di pistonì, sopra ghisa	Di piatto o di costa	Bagnata o unta	0,62*
Corda di canape sopra rovere	Parallele	Senza nulla	0,52
idem idem	Perpendicolari	Bagnata	0,33
Ferro sopra ferro ...	Parallele	Senza spalmatura	**
Ghisa sopra ghisa ...	"	Leggermente unto	0,15
Bronzo sopra bronzo ..	"	Senza unto	0,20
idem sopra ghisa ..	"	"	0,22
Quercia, olmo, ghisa, ferro, acciaio o bronzo sopra sè stessi o l'uno sopra l'altro ..	"	Colle spalmature opportune	0,07 a 0,15

* Al primo muoversi e dopo qualche tempo di contatto.

** Le superfici di questa natura si rodono quando non v'è un unto in mezzo.

Atrito dei perni nei loro cuscinetti.

STATO del		STATO delle superfici	COEFFICIENTI per un mantenimento usuale		per un mantenimento accurato
Perni	Cuscinetti				
Ferro o ghisa	Ghisa	Spalmate con olio d' ulivo, lardo, sego o grasso da ruote-tenero	0,07 a 0,08	0,054	
Ghisa	"	Con asfalto	0,054	—	
"	"	Untuose	0,14	—	
"	Bronzo	Spalmate d' olio ecc.	0,07 a 0,08	0,054	
"	"	(Untuose)	0,16	—	
"	Legno santo	Senza spalmatura	0,18	—	
"	"	Con lardo	0,14	—	
Ferro facinato	Bronzo	Grasso da ruote consistente	0,09	—	
"	"	Untuose e bagnate	0,19	—	
"	"	Poco untuose	0,25	—	
Bronzo	"	Olio	0,10	—	
"	"	Unto da ruote	0,09	—	
"	Ghisa	Olio o sego	—	—	0,045 a 0,052

Trovato così lo sforzo in chilogrammi corrispondente all'attrito, resta a calcolarsi la quantità di forza motrice, che per esso viene consumata, o, come si suol dire, il lavoro dell'attrito stesso, lavoro, che si otterrà del resto nel modo ordinario moltiplicando lo sforzo corrispondente per lo spazio da esso percorso. La determinazione di questo spazio non presenta alcuna difficoltà quando il moto del corpo, che si considera, è rettilineo, poichè esso è allora eguale allo spazio percorso da un punto qualunque del corpo stesso. Ma quando il moto, è circolare, quello spazio deve essere calcolato espressamente. Noi esamineremo ora alcuni esempj, i più comuni nella pratica, i quali basteranno per dare un'idea del modo di procedere nei varj casi.

Si abbia adunque dapprima un albero orizzontale, il quale sopporti dei pesi qualunque. L'attrito che avrà luogo sui perni di quest'albero sarà complessivamente proporzionale al peso totale dell'albero, che qui rappresenterà la pressione normale esercitata sugli stessi perni. Chiamando allora con d il diametro del perno, per ogni giro del medesimo, lo spazio percorso dall'attrito sarà πd ed essendo P il peso o pressione normale, f il coefficiente d'attrito, sarà il lavoro che assorbe l'attrito suddetto per un giro dell'albero eguale a

$$f P \times \pi d.$$

Essendo poi n il numero dei giri dell'albero al minuto primo, lo spazio percorso dall'attrito per ogni minuto secondo, sarà

$$\frac{\pi d \times n}{60}$$

ed il lavoro assorbito pure per ogni minuto secondo, sarà

$$f P \times \frac{\pi d n}{60} = 0,0523 f P d n.$$

Per secondo esempio poniamo un albero verticale caricato

d'un certo peso e cerchiamo il lavoro dell'attrito della superficie d'appoggio del perno contro quella capsuletta che lo sostiene e che si chiama *ralla*. In questo caso lo spazio percorso dai varj punti delle superfici sfregantisi non è lo stesso per tutti, e perciò conviene determinare uno spazio, per così dire, medio, che possa essere ritenuto per tutti i punti stessi. Per trovare questo spazio medio osserviamo (fig. 61.) che il circolo *O* di diametro *a b*, sulla quale il perno si appoggia, può intendersi, mediante raggi, diviso in un numero indefinito di settori, i quali si potranno anche considerare come triangoli. Ora, sui varj punti della superficie di ciascun triangolo avrebbero luogo le azioni resistenti dovute all'attrito, azioni che saranno fra loro parallele. Allora si concluderà che l'azione risultante passerà per il centro di gravità di ciascun triangolo e che, per conseguenza, lo spazio che percorreranno queste azioni risultanti per ogni giro del perno sarà una circonferenza avente per diametro $\frac{2}{3}$ del diametro *a b* della circonferenza esterna. Chiamando allora con *d* questo ultimo diametro, lo spazio medio, del quale parlavamo, sarà, per ogni giro dell'albero, eguale a $\frac{2}{3} \pi d$ e il lavoro corrispondente dell'attrito sarà eguale a

$$f P \times \frac{2}{3} \pi d,$$

denominando come prima con *P* il carico totale sostenuto dall'albero e con *f* il coefficiente d'attrito. Essendo poi *n* il numero dei giri dell'albero per minuto primo, il lavoro che assorbe l'attrito per ogni minuto secondo sarà dato dall'espressione:

$$f P \times \frac{2}{3} \frac{\pi a n}{60} = 0,0349 f P d n.$$

Molte volte avviene che l'albero oltre al carico verticale, sopporti una pressione lateralmente; allora questa pressione, la quale verrebbe ad elidersi contro gli appositi collari, dà luogo pure ad un attrito contro i medesimi. Chiamando *P'* la pres-

sione normalmente esercitata contro questi collari il lavoro dell'attrito corrispondente sarà

$$0,0523 f P' d n$$

ed allora il totale del lavoro che assorbirà l'attrito per quell'albero sarà dato dall'espressione:

$$f d n (0,0523 P' + 0,0349 P).$$

Quanto alla determinazione della pressione P' conviene osservare che essa dipenderà dall'altezza a cui si trova il collare, considerandosi, sotto questo riguardo, l'albero come un sistema che tende a girare intorno al suo estremo inferiore.

Supponiamo finalmente che l'albero in luogo di girare sopra una ralla sia sopportato da un collare, in modo che esso si appoggi sopra una superficie annulare (fig. 62.*). In tal caso, chiamando d il diametro medio fra il diametro della circonferenza esterna e quella dell'interna e chiamando l la larghezza della superficie annulare d'appoggio, si verrebbe ad ottenere il lavoro consumato per l'attrito per ogni giro dell'albero eguale ad

$$f P \times \pi \left(d + \frac{1}{2} \frac{l^2}{d} \right);$$

e per ogni minuto secondo, essendo n il numero dei giri dell'albero per minuto, si avrà

$$0,0523 f P n \left(d + 0,33 \frac{l^2}{d} \right).$$

Dalle formole che abbiamo ora esposto, noi possiamo rilevare facilmente come il lavoro, che assorbe l'attrito nei perni, sia tanto più piccolo quanto più sono piccoli i diametri dei medesimi. Negli alberi verticali poi, a parità di pressione e di velocità, esso riuscirà in generale minore quando il perno gira in

una ralla che non quando è appoggiato ad un collare, e nel caso della ralla esso si potrà ancora diminuire terminando il perno con una superficie semisferica in vece che con un piano. Bisognerà per altro sempre ricordare che, diminuendo di troppo la superficie d'appoggio, la pressione sopra ogni unità quadrata della medesima si aumenta e potrebbe quindi raggiungere il limite oltre al quale l'attrito non è più proporzionale alla pressione stessa.

Nella tabella seguente si troveranno i diametri dei perni in ferro fucinato, calcolati, a seconda della pressione P che essi devono sopportare mediante la formola

$$d = 0,12 \sqrt{P}^1$$

essendo P in chilogrammi e d in centimetri.

P	d	P	d	P	d
157	1.50	1120	4.00	5670	9.00
215	1.75	1418	4.50	6336	9.50
280	2.00	1750	5.00	7000	10.00
356	2.25	2117	5.50	8470	11.00
438	2.50	2520	6.00	10080	12.00
531	2.75	2958	6.50	11830	13.00
630	3.00	3430	7.00	13720	14.00
739	3.25	3938	7.50	15750	15.00
858	3.50	4480	8.00		
984	3.75	5058	8.50		

Un altro caso nel quale la determinazione del lavoro che assorbe l'attrito presenta qualche difficoltà è quello che ha luogo quando si trasmette il movimento rotatorio da un albero ad un altro mediante le ruote dentate. In tal caso i denti che

¹ Vedi REDTENBACHER. *Risultate*, ecc.

si trovano in azione hanno, l'uno sull'altro, un doppio movimento, di strisciamento cioè e di sviluppo; trascurandosi l'attrito prodotto da quest'ultimo, è necessario, per calcolare l'altro, determinare qual'è lo spazio di cui strisciano i denti a contatto mentre le ruote percorrono un dato arco. Non trovando però noi conveniente di impegnarci in questi calcoli alquanto sottili ci limitiamo a dare le formole che risulterebbero dal calcolo e che sono abbastanza confermate anche dalla pratica per le ruote di ordinaria forma e precisione. Chiamando adunque F lo sforzo (in chilogrammi) che deve agire alla circonferenza delle ruote per equilibrare l'attrito dei denti; R il raggio (in metri) della ruota maggiore, N il numero dei giri della ruota R per minuto; n, n' i numeri dei denti delle due ruote; p la pressione che ha luogo sui denti, cioè lo sforzo corrispondente alla periferia della circonferenza media; f il coefficiente d'attrito, si avrà:

a) Per le ruote cilindriche con ingranaggio esterno:

$$F = fp\pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right)$$

e chiamando L , il lavoro (in chilogrammetri) assorbito per minuto secondo, sarà

$$L = 0,1017 NRfp\pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) = 0,328 NRfp \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right)$$

b) Per le ruote cilindriche con ingranaggio interno:

$$F = fp\pi \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right)$$

$$L = 0,1017 NRfp\pi \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) = 0,328 NRfp \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right)$$

c) Per le ruote coniche (ingranaggio esterno), essendo α l'angolo formato dagli assi:

$$F = \pi f p \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} + \frac{2}{nn'} \cos \alpha}$$

$$L_r = 0,328 NR fp \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} + \frac{2}{nn'} \cos \alpha}.$$

Termineremo quest'argomento con un ultimo esempio, calcolando il lavoro dell'attrito per un giro della puleggia nella macchina d'Atwood. In questo apparecchio, in luogo di appoggiare i due perni della puleggia sopra due supporti fissi, si è appoggiato ciascheduno di essi sulle periferie incrociate di due altre puleggie, le quali poi si muovono sopra perni nel modo ordinario. Con questa disposizione avviene che, girando la puleggia principale, i suoi perni fanno girare le quattro puleggie che servono loro di supporto, sulle periferie delle quali ha luogo in conseguenza un semplice attrito volvente che per brevità trascuriamo. L'attrito poi radente verrà portato sugli otto perni delle quattro puleggie sopradette, sui quali verrà distribuita tutta la pressione proveniente dai pesi attaccati alla macchina e dal peso proprio di tutte le puleggie. Supponendo adunque che tutti questi pesi nominati sommino in complesso a chilogrammi 0,500 e che si abbia:

Diametro della puleggia principale = metri 0,120			
»	»	di supporto	» 0,080
»	dei perni		» 0,002

per trovare lo spazio percorso dall'attrito sui quattro perni per un giro della puleggia principale, dovremo osservare che le puleggie di supporto avranno nello stesso tempo percorso alla

loro circonferenza un arco eguale in lunghezza allo sviluppo della circonferenza del perno, che su di loro si appoggia. Ma, siccome la circonferenza del detto perno e quella della puleggia stanno fra loro come i loro diametri, così, essendo questi diametri rispettivamente 2 ed 80, ne verrà che la circonferenza della puleggia sarà 40 volte quella del perno, e che quindi l'arco da essa percorso per un giro del detto perno sarà $\frac{1}{40}$ della sua circonferenza. Allora ciascun perno delle puleggie di supporto avrà percorso pure $\frac{1}{40}$ della propria circonferenza ossia

$$\frac{1}{40} \times 3,14 \times 0,002 = 0,000157.$$

Ammettendo che il coefficiente d'attrito sia eguale a 0,08, si avrà il lavoro che assorbe l'attrito per un giro della puleggia eguale a

$$0,08 \times 0,500 \times 0,000157 = \text{ch. m. } 0,0000628.$$

Essendo lo spazio percorso dai pesi della macchina, mentre la puleggia fa un giro, eguale a $m. 3,14 \times 0,120 = m. 0,377$, dividendo il lavoro sopra calcolato per questo numero si otterrà lo sforzo che converrebbe esercitare sul peso della macchina per controbilanciare l'attrito, ossia quel pesetto che si dovrebbe aggiungere al peso discendente per togliere il ritardo che verrebbe prodotto dall'attrito stesso. Questo sforzo sarebbe nel nostro caso eguale a

$$\frac{\text{ch. m. } 0,0000628}{m. 0,377} = \text{ch. } 0,000166.$$

— La seconda delle resistenze passive, che pure ha qualche importanza in molte macchine, è la *rigidezza delle funi*. Dovunque si hanno funi, le quali durante il movimento debbano avvolgersi e svolgersi da puleggie o da tamburri, è evidente

che bisognerà consumare una certa quantità di forza motrice per piegare e raddrizzare le funi stesse. La grandezza della resistenza locale dovuta alla rigidità di queste funi dipenderà dal diametro delle funi stesse e dal diametro delle puleggie o tamburri sui quali esse devono avvolgersi, poi dipenderà dalla natura delle funi, dal modo con cui sono fabbricate, dal loro stato, ecc.

È evidente che queste ultime cause, capaci di modificare in modo assai vario in pratica la rigidezza di una fune, rendono assai difficile l'esprimere mediante una formola la misura della resistenza che ne deriva. Noi perciò, lasciando da parte ogni discussione, ci limiteremo a dare una formola, la quale può addottarsi in pratica e che, in base alle esperienze fatte, dà per la maggior parte dei casi una approssimazione sufficiente.

Distinguendo adunque le funi in due sole categorie, cioè in funi di canape e in funi di filo di ferro, e chiamando d il diametro della fune in centimetri, D il diametro della puleggia o tamburro su cui essa si avvolge, pure in centimetri, P lo sforzo di trazione che sopporta il tratto di fune che si avvolge, la resistenza locale R in chilogrammi dovuta alla rigidezza della fune, sarà:

Per funi di canape

$$R = 0,26 P \frac{d^2}{D};$$

Per funi metalliche

$$R = 0,58 P \frac{d^2}{D}.$$

Il diametro d si potrà ricavare, per funi di canape, dalla formola

$$d = 0,113 \sqrt{P}$$

nella quale P è il peso che la fune deve sopportare. La se-

guente tabella fornisce i varj valori di d ricavati dalla stessa formola:

$Pch.$	d cent.	$Pch.$	d cent.
28	0.6	702	3.0
50	0.8	798	3.2
78	1.0	902	3.4
112	1.2	1010	3.6
153	1.4	1125	3.8
200	1.6	1248	4.0
252	1.8	1376	4.2
312	2.0	1509	4.4
377	2.2	1650	4.6
449	2.4	1797	4.8
527	2.6	1950	5.0
610	2.8	2109	5.2

Conosciuta così la resistenza locale, si calcolerà la perdita corrispondente di lavoro moltiplicando, al modo ordinario, questa resistenza per lo spazio da essa percorso.

Quando in luogo di una fune si impiega una catena, perchè questa si avvolga sopra un tamburro o perchè essa passi sulla gola di una carrucola, è necessario che le maglie, ond'è composta, abbiano a piegare l'una sull'altra in modo da disporsi secondo un poligono, il quale verrebbe circoscritto alla periferia del tamburro o della gola. Questa rotazione delle maglie darà evidentemente luogo ad un attrito, che si manifesterà fra i punti di contatto delle maglie stesse e che sarà proporzionale allo sforzo di trazione che sopporta la catena. Se ora noi immaginiamo una catena ordinaria a maglie oblunghe e ci figuriamo una di queste maglie o anelli dal momento in cui essa incomincia ad appoggiarsi al tamburro o alla carrucola, indi la

seguiamo fino a quando essa giunge all'altro estremo del diametro in direzione opposta a quella che aveva da principio, noi troveremo che, mentre il tamburro o la carrucola avranno fatto un mezzo giro, la maglia avrà ruotato di mezza circonferenza intorno al proprio perno. Lo spazio adunque che avranno percorso i punti di contatto di due maglie consecutive sarà di metà della circonferenza della sezione del ferro di cui esse sono formate per ogni mezzo giro fatto dalla carrucola o dal tamburro. Perciò, se noi chiamiamo d il diametro del ferro, di cui sono formate le maglie della catena, e chiamiamo ancora P e D il carico sopportato dalla catena ed il diametro del tamburro o carrucola, lo sforzo che sarà necessario alla periferia degli stessi per equilibrare la nominata resistenza, sarà

$$f P \frac{d}{D}$$

dove f si potrà prendere pei casi ordinarij eguale a 0,20.

Oltre all'attrito, che abbiamo ora esaminato, ve n'è da aggiungere un altro tutte le volte che la catena, oltre all'avvolgersi o svolgersi, è trattenuta sulla gola o sul tamburro mediante uncini o denti di ferma. In tal caso l'anello della catena viene dapprima ad infilarsi sul dente; indi vi si appoggia esercitando contro di esso una pressione eguale allo sforzo che esso sopporta, nel mentre che, girando la ruota o il tamburro, avviene un movimento relativo di strisciamento fra il dente e l'anello, il quale ha per effetto di far passare il contatto fra i medesimi successivamente in diverse posizioni del contorno della sezione dell'anello stesso. Noi potremo adunque ritenere che quest'attrito sarà eguale al precedente, e lo spazio da esso percorso potrà pure considerarsi eguale al già calcolato. Noi adunque riterremo che, quando la periferia d'avvolgimento è munita di uncini o denti di ferma, la resistenza totale dovuta

al movimento della catena e calcolata sempre sulla nominata periferia d'avvolgimento, sarà:

$$2 f P \frac{d}{D} \cdot ^1.$$

La tabella seguente servirà per calcolare i diametri d del ferro componente le maglie di una catena, dato lo sforzo che essa deve sopportare. Qui però noteremo che nella pratica si dovrà stare alquanto più su o più giù dei valori dati da questa tabella, a seconda che il massimo sforzo che può subire la catena e pel quale la calcoliamo, corrisponderà ad un lavoro ordinario e di una certa durata, oppure ad un caso straordinario e di breve durata. In fatti il coefficiente di resistenza adottato in questa tabella è di chilogrammi 3,60 per millimetro quadrato di sezione, mentre per sforzi continuati, attesa la possibilità di avere dei salti, non converrebbe oltrepassare i 3 chilogrammi, ed all'opposto per sforzi straordinari lo si può spingere anche fino a chilogrammi 10, tanto più se il ferro è di buona qualità e se si avranno nel maneggio le opportune precauzioni, onde evitare possibilmente le irregolarità di movimento che possono produrre urti.

P (chil.)	d (cent.)	PESO per metro lineare di catena chilogrammi	P (chil.)	d (cent.)	PESO per metro lineare di catena chilogrammi
142	0.5	0.54	1109	1.4	4.23
174	0.6	0.78	1270	1.5	4.86
277	0.7	1.06	1449	1.6	5.53
362	0.8	1.38	1636	1.7	6.24
458	0.9	1.75	1834	1.8	7.00
566	1.0	2.16	2060	1.9	7.79
684	1.1	2.61	2264	2.0	8.64
792	1.2	3.11	2496	2.1	9.53
956	1.3	3.65	2739	2.2	10.45

¹ Questa formola è ammessa dal Graßhof. Vedi note al REDTEMBACHER già citato.

— Una terza resistenza passiva, che però non acquista una certa importanza se non che in alcuni casi speciali, è la così detta *resistenza dei mezzi*. Qualunque corpo trovasi in pratica circondato da un fluido nel quale esso è immerso. Perchè dunque il corpo prenda un movimento è necessario che esso sposti in ogni minuto secondo un volume di fluido *per lo meno* eguale a quello di un parallelepipedo, il quale abbia per base la sezione massima del corpo perpendicolarmente al suo movimento, e per altezza o lunghezza lo spazio da esso per corso nel minuto secondo. Sarà dunque necessario, per ottenere ciò, comunicare a quel fluido una velocità all'incirca eguale a quella del corpo. La quantità allora di forza motrice, che verrà impiegata, potrà misurarsi dalla potenza viva che verrebbe comunicata al fluido spostato. Ora, questa potenza viva sarà espressa da

$$\frac{1}{2} m v^2$$

in cui m sarà la massa del fluido; v la velocità del corpo. La massa m poi sarà eguale al prodotto del volume per la densità del fluido stesso, e finalmente il volume, come già abbiamo detto, sarà il prodotto della sezione massima del corpo perpendicolarmente al movimento per la velocità del medesimo¹. Chiamando adunque con d la densità del fluido (per rispetto all'acqua distillata) e con s la sezione sopraddetta, la massa in questione potrà essere espressa da

$$s \times v \times d$$

e la potenza viva da

$$s \times v \times d \times v^2 \text{ ossia } s \times d \times v^3$$

¹ Per *densità* intendiamo la massa dell'unità di volume; essa è dunque eguale al peso specifico, cioè al peso dell'unità di volume diviso per g .

Deduciamo adunque da ciò che il lavoro consumato per ogni minuto secondo per ispostare il *mezzo*, è proporzionale al cubo della velocità del corpo, alla sezione massima che il corpo stesso oppone al movimento ed alla densità del mezzo. Dividendo poi quest'espressione per la velocità si avrà la resistenza locale proporzionale alla densità del fluido, alla sezione sopradetta ed al quadrato della velocità. Convieni poi osservare che, oltre agli elementi ora accennati, influirà sul valore di questa resistenza anche la forma del corpo che si muove, poichè questa può più o meno agevolare lo spostamento del fluido in avanti e il ristabilimento dell'equilibrio all'indietro.

Non essendo per noi però necessario l'entrare in dettagli su questo argomento ci limiteremo a dare le formole pratiche, le quali possono servire, quando occorra, per calcolare la resistenza incontrata da un corpo che si muove nell'aria o nell'acqua. Per un corpo adunque parallelepipedo, che si muove nell'aria, si può ritenere la resistenza locale sopra accennata eguale a

$$0,0720 \times s \times v^2 \text{ chilogrammi}$$

ed il lavoro consumato per minuto secondo

$$0,0720 \times s \times v^3 \text{ chilogrammetri per minuto secondo.}$$

Per un convoglio sulla ferrovia si può fare

$$s = m.' q.' 7.40 + 1.05 \times n,$$

essendo n il numero dei carri componenti il convoglio.

Per un corpo nell'acqua la resistenza locale al suo movimento è eguale in chilogrammi a

$$k s v^2,$$

dove s rappresenta in metri quadrati la sezione massima perpendicolare al movimento della parte immersa del corpo e k un coefficiente numerico, il quale varia a seconda della forma, e delle proporzioni del corpo stesso. A un dipresso in media si potrà ritenere $k = 57$ per un parallelepipedo o per un prisma retto la cui lunghezza sia compresa fra 3 e 6 volte la sua sezione trasversale.

Per le barche si avrebbe $k = 17$; per le grosse navi da merci, per i battelli a vapore, costrutti per grande velocità sia sul mare che sui laghi, il valore di k varierebbe fra 8 e 6.

— Passiamo finalmente a considerare un altro fenomeno, il quale nella macchine è spesso causa di una perdita di forza motrice, vogliamo dire l'*urto*. Colla parola *urto* noi intendiamo significare quel fatto, pel quale un corpo, venendo ad incontrare un altro, modifica in un tempo quasi inapprezzabile il movimento di quello, rimanendone in conseguenza modificato anche il proprio. Onde poter studiare le conseguenze che deriveranno dal fatto accennato, è necessario che noi l'analizziamo esaminandolo nelle varie sue fasi, benchè la sua durata sia, come già abbiamo detto, sempre assai piccola.

Noi dunque figuriamoci un corpo A , il quale, animato da una velocità v , venga ad incontrare un altro corpo B animato anch'esso di una velocità v' (che, per fissare le idee, supporremo nello stesso senso), ed ammettiamo che i centri di gravità dei due corpi o gli estremi dei loro raggi di girazione si muovano sopra una stessa linea. Il primo fatto allora che noi osserveremo, dal momento in cui il corpo A viene a contatto col corpo B , sarà che il corpo A eserciterà una pressione sul B nel senso del suo movimento; mentre il corpo A stesso riceverà, in causa della reazione del corpo B , una pressione in senso contrario. In conseguenza di ciò il corpo B verrà ad acquistare un moto accelerato, mentre il corpo A prenderà un

moto ritardato. In seguito, le pressioni che abbiamo accennato non si manterranno costanti, ma andranno decrescendo, finchè si ridurranno a zero quando, ridottesi le velocità dei due corpi eguali, cesserà ogni azione dell'uno sull'altro. Ecco dunque che cosa avverrà in questo breve istante che dura l'urto; ora veniamo ai calcoli. Chiamiamo perciò t il tempo durante il quale avvengono le azioni reciproche sopra indicate; p la pressione media esercitata sui due corpi A e B , pressione, che sarà numericamente la stessa per tutt' e due; φ la perdita di velocità per minuto secondo che subirà durante l'urto il corpo A ; φ' l'acquisto pure per minuto secondo per il corpo B ; finalmente siano m ed m' le masse dei corpi A e B , v e v' le loro velocità prima dell'urto ed u la velocità comune ai due corpi al termine dell'urto. Supponendo che la pressione esercitata reciprocamente fra i due corpi urtante ed urtato sia per tutta la durata dell'urto costante ed eguale al suo valore medio p , anche φ e φ' saranno costanti, e quindi il movimento del corpo B sarà uniformemente accelerato, quello del corpo A uniformemente ritardato. Considerando allora il corpo A noi potremo scrivere

$$u = v - \varphi t$$

e considerando il corpo B avremo analogamente

$$u = v' + \varphi' t$$

Avremo poi

$$\varphi = \frac{p}{m}$$

e

$$\varphi' = \frac{p}{m'}.$$

Sostituendo questi valori nelle due equazioni precedenti avremo

$$u = v - \frac{p}{m} t.$$

$$u = v' + \frac{p}{m'} t.$$

Moltiplicando ora la prima di queste ultime equazioni per m e la seconda per m' , si avrà:

$$m u = m v - p t$$

$$m' u = m' v' + p t$$

e sommandole fra loro rimarrà

$$u (m + m') = m v + m' v'$$

da cui si ha

$$u = \frac{m v + m' v'}{m + m'}.$$

La velocità adunque che avranno i due corpi al termine dell'urto è eguale alla somma dei prodotti delle masse dei due corpi per le rispettive velocità prima dell'urto divisa per la somma delle masse stesse. Se il corpo urtato fosse fermo, allora si farebbe nella formola $v' = 0$ e si avrebbe:

$$u = \frac{m v}{m + m'}.$$

Se invece i due corpi prima dell'urto si muovevano in senso opposto, allora si dovrà considerare v' come negativo e quindi sarà

$$u = \frac{m v - m' v'}{m + m'} :$$

il segno della velocità u sarà in tal caso eguale a quello del maggiore dei due prodotti $m v$ ed $m' v'$.

Questo valore di u può essere trovato graficamente nel seguente modo: partendo da un punto A (fig. 63.) si prendano sopra una retta $A v$ le $A v$, $A v'$ proporzionali alle velocità v e v' e nel senso relativo delle medesime (se v' fosse negativo verrebbe preso qui a sinistra di A). Si conducano poi punti A, v, v' le parallele come d'ordinario; indi sopra una retta $a p$ parallela ad esse si prendano le parti $a p, p p'$ proporzionali ai pesi dei due corpi con una scala qualunque; si prenda la distanza del punto O da $a p$ eguale ad $a p'$ e si conducano i raggi $O a, O p, O p'$ e le $1, 2; 2, 3; 3, 4$ rispettivamente parallele a questi raggi; sarà allora $1, 4 = u$. Per dimostrare questa proposizione non si avrebbe che a ripetere quanto si è già detto riguardo al poligono funicolare ed al piano dei momenti. Del resto basterà considerare i triangoli simili $1, 2, x$ e $a O p$ e gli altri $x 3 4$ e $p O p'$ e ricordare che l'altezza dei triangoli $a O p$ e $p O p'$ è, per costruzione eguale a $p + p'$, cioè alla somma dei pesi dei due corpi. Si otterrà allora

$$1 x = \frac{p \times v}{p + p'}$$

$$x 4 = \frac{p' \times v'}{p + p'}$$

e quindi

$$1 4 = \frac{p \times v + p' v'}{p + p'} = \frac{m v + m' v'}{m + m'} = u.$$

Dobbiamo ora fare un'altra osservazione sulle conseguenze dell'urto. Noi abbiamo visto che la velocità del corpo A passa in un tempo brevissimo dal valore v al valore u e così quella del corpo B passa contemporaneamente dal valore v' allo stesso valore u ; l'accelerazione di velocità φ' o il ritardamento φ dovranno dunque essere molto forti, come pure dovrà essere grande il valore della pressione p , che viene ad aver luogo istantaneamente fra i due corpi. Questo mutamento repentino,

il quale ha la sua causa in un punto determinato del corpo, non può trasmettersi a tutta la massa del corpo stesso senza che ne venga disturbato sensibilmente l'equilibrio interno delle sue particelle. La conseguenza di ciò sarà che il corpo urtato, come anche il corpo urtante si schiaccierauno comprimendosi nella posizione ove si manifesta la pressione p . Ora, cessata l'azione esterna dell'urto, può avvenire che i corpi rimangano schiacciati, oppure che, per la reazione interna molecolare, riprendano la loro forma primitiva. Nel primo caso i corpi si direbbero *rigidi*, ed allora, cessata l'azione dell'urto, essi continuerebbero a muoversi uniti colla velocità u formando come un solo corpo; nel secondo caso essi si direbbero *elastici* ed allora, al cessare dell'azione esterna, i corpi avrebbero bensì la velocità comune u , ma per un solo istante; poichè immediatamente essa verrebbe di nuovo modificata dalle reazioni dei due corpi stessi. Nel primo caso la forza motrice impiegata nel deformare i corpi rimane perduta e convertita in calore; nel secondo caso essa viene restituita, ma in una direzione differente. L'urto adunque nei corpi rigidi cagiona una perdita di forza motrice ed inoltre una deformazione dei corpi, un'alterazione della loro costituzione interna, un riscaldamento dei medesimi. Nei corpi invece perfettamente elastici non vi sarebbe a rigore perdita di forza motrice, ma solo un mutamento nei movimenti dei medesimi. Nella pratica non esistono propriamente corpi perfettamente rigidi, nè corpi perfettamente elastici; i pezzi però componenti le macchine devono considerarsi piuttosto come corpi rigidi, che come elastici, ed è perciò che importa l'evitare colla massima cura gli urti, salvo i casi speciali in cui i pezzi stessi siano costrutti espressamente per resistervi.

Volendo calcolare la perdita di forza motrice che ha luogo in seguito all'urto dei corpi rigidi, basterà fare la differenza fra la somma delle potenze vive dei due corpi prima dell'urto, e la potenza viva che i medesimi hanno dopo l'urto; la per-

dita di potenza viva rappresenterà la perdita di forza motrice. Noi avremo allora:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m' v'^2$$

per la potenza viva dei corpi prima dell'urto; e la potenza viva dei corpi stessi dopo l'urto sarà:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (m + m') u^2 &= \frac{1}{2} (m + m') \frac{(m v + m' v')^2}{(m + m')^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m^2 v^2 + 2 m m' v v' + m'^2 v'^2}{m + m'}. \end{aligned}$$

Facendo la differenza fra queste due potenze vive si avrà:

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m' v'^2 - \frac{1}{2} \frac{m^2 v^2 + 2 m m' v v' + m'^2 v'^2}{m + m'}$$

ossia, riducendo allo stesso denominatore,

$$\frac{1}{2} \frac{m^2 v^2 + m m' v^2 + m' m v'^2 + m'^2 v'^2 - m^2 v^2 - 2 m m' v v' - m'^2 v'^2}{m + m'}$$

e facendo le riduzioni rimarrà finalmente

$$\frac{1}{2} \frac{m m' (v^2 + v'^2 - 2 v v')}{m + m'} = \frac{1}{2} \frac{m m' (v - v')^2}{m + m'}.$$

La perdita di forza motrice è dunque proporzionale al quadrato della differenza fra le velocità dei due corpi al principiare dell'urto ossia al quadrato della velocità *relativa* dei due corpi, qualunque poi siano le velocità assolute dei corpi stessi. Da questa formola noi impareremo come, quando non sia possibile evitare affatto gli urti, convenga almeno ridurre la velocità relativa dei due corpi, che vengono ad incontrarsi, al minimo valore possibile. È perciò che nelle ruote idrauliche non dovremo mai fare arrivare l'acqua animata da una grande

velocità sopra una pala normale al movimento di essa e dotata di una velocità assai minore; ma dovremo dare alla pala una forma ed una posizione tale, che l'acqua arrivando sopra di essa vi eserciti una pressione costante senza provare un istantaneo cambiamento di velocità, od almeno fare in modo che l'acqua arrivi sulla pala con una velocità assai piccola e quindi poco diversa da quella della pala stessa. Le ruote idrauliche in fatti del primo genere, che si usano ancora qualche volta per economia, non danno in pratica più del 30 per cento di effetto utile, mentre colle ruote meglio costrutte, o colle ruote che ricevono l'acqua senza pressione si ha il 60 e il 70 e per fino il 90 per cento.

Per completare quest'argomento diremo ancora qualche parola sull'urto nei corpi perfettamente elastici. Come già abbiamo accennato, questi corpi reagiscono e riprendono la loro forma primitiva appena che cessi l'azione esterna, che ha prodotto la loro deformazione. Questa reazione, essendo per ciascuno dei due corpi eguale all'azione ricevuta prima dall'esterno, sarà tale da portare nel movimento del corpo stesso una modificazione eguale a quella che vi aveva già portato l'azione esterna. Inoltre, supponendo ancora che le velocità dei due corpi prima dell'urto fossero nello stesso senso, avverrà che, nel periodo della reazione la velocità del corpo *A*, che era divenuta *u*, verrà di nuovo diminuita e la velocità del corpo *B* verrà di nuovo aumentata. Più precisamente, se noi chiamiamo *V* e *V'* le velocità che i corpi *A* e *B* verranno definitivamente ad acquistare dopo l'urto, noi osserveremo che la quantità, di cui la velocità del corpo *A* verrà diminuita nel periodo della reazione, sarà *v-u*, quantità eguale a quella di cui la velocità stessa si era diminuita già in seguito all'azione esterna. Così analogamente la quantità di cui, nello stesso periodo o della reazione, verrà aumentata la velocità del corpo *B* sarà

$$u - v'.$$

Allora noi avremo:

$$V = u - (v - u) = 2u - v$$

$$V' = u + u - v' = 2u - v'.$$

Sostituendo ora in luogo di u il suo valore avremo:

$$\begin{aligned} V &= 2 \frac{m v + m' v'}{m + m'} - v = \frac{2 m v + 2 m' v' - m v - m' v}{m + m'} = \\ &= \frac{2 m' v' + v (m - m')}{m + m'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= 2 \frac{m v + m' v'}{m + m'} - v' = \frac{2 m v + 2 m' v' - m v' - m' v'}{m + m'} = \\ &= \frac{2 m v + v' (m' - m)}{m + m'} \end{aligned}$$

Dall'esame di queste due formole generali, le quali servono a calcolare in generale la velocità che prendono definitivamente i due corpi dopo l'urto, possiamo ricavare alcune conseguenze. Prima di tutto, se noi supponiamo le masse dei due corpi eguali fra loro, ossia

$$m = m'$$

abbiamo:

$$V = \frac{2 m v'}{2 m} = v'$$

$$V' = \frac{2 m v}{2 m} = v;$$

vale a dire che in tal caso i due corpi si *scambiano le velocità* prendendo il corpo B la velocità che aveva prima il corpo A e viceversa.

Se il corpo B fosse stato dapprima fermo, supponendo ancora le masse dei due corpi eguali, si avrebbe:

$$V = 0; V' = v$$

cioè il corpo si fermerebbe ed il corpo *B* prenderebbe la velocità di *A*. In ciò sta la ragione di quel giochetto' che si fa vedere in fisica, il quale consta di molte palle d'avorio eguali, sospese a dei cordoncini in modo che esse si trovino a contatto ed i loro centri siano sulla medesima linea. Se allora noi spostiamo la prima di queste palle di un certo arco e la lasciamo ricadere, in seguito all'urto avviene che tutte le palle stanno ferme meno l'ultima, la quale si stacca di un arco eguale a quello di cui si era spostata la prima.

Finalmente se noi supponiamo il corpo *B* fermo e di massa indefinitamente grande, abbiamo

$$V = \frac{v(m - \infty)}{m + \infty} = -v$$

$$V' = 0.$$

Quando dunque un corpo perfettamente elastico urta contro un altro fisso e pure elastico, il primo corpo rimbalza, prendendo in senso opposto la velocità che aveva prima dell'urto.

Colle regole che abbiamo esposto si potrà sempre calcolare, con un'approssimazione più o meno grande, la quantità di lavoro motore, la quale verrà assorbita dalle varie resistenze passive che si riscontrano in una data macchina; dimodochè, sottraendo questa perdita di lavoro dal lavoro motore, si verrà a trovare il *lavoro utile*, che deve rendere la macchina stessa. Queste calcolazioni però, benchè non presentino alcuna difficoltà, possono facilmente divenire complicate o lunghe. Egli è perciò che nella pratica si ricorre il più delle volte a mezzi sperimentali, i quali somministrano direttamente e senza calcoli il lavoro utile fornito dalla macchina. L'apparecchio che serve più comunemente a questo scopo, è quello conosciuto sotto il nome di *freno dinamometrico di Prony* (fig. 64.). Questo

istromento si applica ad un albero appartenente alla macchina, albero che, ordinariamente, è il motore, talora il primo o il secondo albero comandato. Scelto il posto in cui si vuole applicare il freno, si incomincia col fissare all'albero un manicotto, il quale abbia un diametro all'incirca 4 o 6 volte il diametro dell'albero stesso ed una larghezza da una volta ad una volta e mezza il detto diametro. Contro questo manicotto, il quale deve essere perfettamente tornito all'esterno e fissato all'albero accuratamente concentrico al medesimo, si adattano le mascelle *C, D* di legno pure tornite con cura e lavorate di sottile in modo, che le loro superfici di contatto presentino una tessitura compatta e fina; queste mascelle si stringono contro il manicotto mediante i bulloni *E*. Se ora noi supponiamo che l'albero, sul quale si fa l'esperienza, venga disgiunto da tutti gli altri meccanismi, ch'egli deve muovere, è evidente che esso verrà a prendere una velocità assai maggiore della velocità normale. Ma se noi stringiamo le mascelle *C, D*, come già si è detto, e nello stesso tempo mettiamo sul piatto *G* i pesi opportuni per impedire che il braccio *F* venga trascinato in giro coll'albero, l'attrito, che si svilupperà fra il manicotto e le mascelle stesse farà rallentare nuovamente la velocità dell'albero. Noi potremo adunque stringere di tanto i bulloni, che la velocità dell'albero venga ad essere eguale a quella, colla quale esso deve girare quando si trovano ad esso congiunti gli altri meccanismi. In tal caso vuol dire che il lavoro consumato dall'attrito sul manicotto equivale precisamente al lavoro, che avrebbero consumato i meccanismi stati disgiunti. Ma se noi avremo posto sul piatto *G* i pesi occorrenti per conservare il braccio *F* in equilibrio, il che si sarà ottenuto quando il braccio stesso oscillerà intorno alla posizione orizzontale, il lavoro dei pesi posti sul piatto misurerà il lavoro dell'attrito sopra accennato, e per conseguenza il lavoro utile che l'albero è capace di trasmettere. Chiamando adunque *l* la distanza del cen-

tro del piatto G dall'asse di rotazione, e con p l'ammontare dei pesi posti sul piatto, il lavoro che viene prodotto da questi pesi per ogni giro dell'albero è eguale a

$$2 \pi l \times p;$$

e se l'albero fa n giri al minuto, il lavoro stesso per ogni minuto secondo sarà

$$\frac{2 \pi l p n}{60}.$$

La quantità

$$\frac{2 \pi l}{60}$$

è una costante per un dato istromento, e quindi può essere calcolata una volta per sempre; la misura allora dell'effetto utile della macchina sottoposta all'esperienza si otterrà moltiplicando il peso p pel numero n e per la costante dell'istromento adoperato. È a questo modo che noi possiamo assicurarci della buona costruzione di una macchina, oppure che possiamo calcolare il rapporto fra l'effetto utile fornito da una motrice di data forma e la forza da essa consumata. Nella pratica noi ci serviamo spesso di questi rapporti o *coefficienti di rendimento* nel fare i preventivi della forza motrice che sarà necessaria per ottenere un dato effetto, oppure dell'effetto che si potrà ricavare da una data forza disponibile, dato il tipo della macchina che si intende impiegare.

CAPITOLO UNDICESIMO.

APPLICAZIONE DELLE TEORIE E DELLE COSTRUZIONI GRAFICHE DIMOSTRATE AL CALCOLO DELLE MACCHINE IN EQUILIBRIO.

Si intende in generale per *macchina* un insieme di pezzi collegati fra loro in modo che ogni movimento dell'uno, il quale non alteri la solidità del sistema, debba necessariamente produrre alcuni movimenti determinati negli altri. Le macchine si possono distinguere in motrici ed operanti. Le prime sono destinate a raccogliere la forza motrice sviluppata da una data sorgente (vedi l'*Introduzione*) ed a trasmetterne l'effetto ad un organo a ciò destinato sotto la forma più opportuna per essere poi utilizzata nelle varie industrie. Le seconde invece non sono che congegni destinati a trasformare il moto ricevuto da una motrice derivandone i varj movimenti necessarj per compiere le operazioni per le quali la macchina è destinata. Il numero delle prime è limitato, essendo limitato il numero delle sorgenti dalle quali possiamo ricavare la forza motrice; il numero delle seconde invece è grandissimo e può andar sempre crescendo, come crescono gli svariati bisogni dell'industria. Le macchine operanti si potrebbero poi ancora distinguere in macchine propriamente dette ed in istromenti. Le prime sarebbero quei congegni in cui i varj movimenti richiesti vengono prodotti in seguito ad una opportuna combinazione di

organi quasi senza il concorso dell'uomo, il quale molte volte non vi esercita che una semplice sorveglianza. Cogli stromenti invece il lavoro non si compie che sotto la immediata direzione dell'uomo che opera. Così la *pialla* del falegname è uno stromento poichè i suoi movimenti dipendono direttamente dalla mano che l'adopera; poichè il lavoro da essa prodotto dipende dall'abilità o dalla volontà dell'operaio che lavora. La *macchina* invece *da piallare* è una vera macchina; poichè basta presentare ad essa nel posto designato la trave o la tavola da piallarsi, ed essa poi si incarica di far uscire dall'altra parte la trave o la tavola piallata, squadrata od anche sagomata a seconda del modo con cui la macchina fu costruita. La differenza delle moderne manifatture dalle antiche è specialmente questa, che gli stromenti cedono il posto alle macchine, e spesso gli operai ai manuali, la mente unica direttrice all'abilità individuale dei varj operatori.

In tutte le macchine hanno luogo tre generi di azioni: le forze motrici, le resistenze utili, le resistenze passive. Come già abbiamo altra volta accennato (vedi pag. 24), il moto di una macchina è uniforme quando il lavoro motore è precisamente eguale alla somma dei lavori delle resistenze utili e passive; in tal caso la macchina dicesi in *equilibrio*. Nelle macchine ordinariamente vi è una velocità colla quale si verifica l'equilibrio sopra accennato; che se, in un dato istante il lavoro motore viene a superare i lavori resistenti, allora il movimento della macchina si accelera finchè siasi raggiunta quell'altra velocità, colla quale ha luogo nuovamente l'equilibrio. Viceversa, quando le resistenze s'accrescono ed il lavoro motore viene ad essere inferiore al lavoro totale resistente, il movimento della macchina si ritarda. Quella velocità della macchina, la quale corrisponde all'equilibrio della medesima quando le forze motrici e le resistenze hanno in essa il valore ordinario, e colla quale l'effetto della macchina deve essere il migliore, si chiama la

velocità di *regime*. Questa velocità nelle manifatture è spesso più o meno rigorosamente determinata; cosicchè, se durante l'azione possono facilmente verificarsi delle alterazioni nei valori delle varie forze o resistenze, si applicano alla macchina organi speciali destinati ad impedire che il movimento della medesima si scosti di molto da quello di regime. Quando la macchina è in equilibrio esistono dei rapporti costanti fra le pressioni o gli sforzi locali corrispondenti alle varie azioni che hanno luogo nella macchina; la determinazione di questi rapporti costituisce ciò che ordinariamente si dice l'*equazione di equilibrio* della macchina.

Non essendo qui possibile il fare uno studio generale sulle macchine, il che esigerebbe cognizioni speciali sui varj meccanismi, noi ci limiteremo ad applicare i principj generali dimostrati allo studio di alcune macchine semplici impiegate specialmente nelle costruzioni pel sollevamento dei materiali, od in generale per operare grandi sforzi, oppure per ottenere rapidi movimenti.

Il bisogno di ottenere grandi sforzi, impiegando motori che, come quelli animali, non sarebbero capaci per sè di esercitarli, fu sentito fino dai tempi più antichi e, possiamo dire, fin da quando l'uomo si mise al lavoro per fabbricarsi la prima capanna. La serie dei meccanismi immaginati a tale scopo nei varj tempi, ed arrivati la più parte fino a noi senza grandi modificazioni, costituivano un tempo la parte più seria della meccanica allora conosciuta. Per noi essi si riducono tutti ad un solo tipo, a sistemi cioè di rotazione, nei quali la pressione esercitata dal motore (potenza) e quelle dovute alle resistenze (resistenza) si trovano a diverse distanze dall'asse di rotazione e precisamente in modo che la somma dei prodotti delle resistenze per le rispettive distanze dall'asse di rotazione sia eguale al prodotto della potenza per la distanza della medesima dallo stesso asse. La determinazione adunque dei rapporti fra questi

varj sforzi in una di tali macchine è assai semplice e può farsi tanto numericamente, che applicando le note costruzioni grafiche. Noi dunque esamineremo i seguenti esempi:

1.^o *Leve*. — Si chiama in generale con questo nome un bastone di legno o di ferro, retto o curvo od anche angolare, il quale ruota intorno ad un asse normale al medesimo ed al quale sono applicate una potenza ed una resistenza in uno stesso piano perpendicolare al detto asse di rotazione. È desso dunque il sistema rotatorio il più semplice che si possa immaginare e, possiamo dire, anche il più utile, poichè esso entra in quasi tutte le macchine. Chiamando P la potenza, ossia lo sforzo esercitato dal motore in A perpendicolarmente ad AB (fig. 65.^a), e Q la resistenza che opera in B pure perpendicolarmente ad AB e trascurando l'attrito sul perno C , il cui lavoro è in generale molto piccolo, si avrà per l'equilibrio di questo sistema

$$P \times AC = Q \times CB^1$$

Graficamente, volendo trovare lo sforzo P , o potenza, essendo dato lo sforzo resistente Q , si prenda quest'ultimo sforzo da A in q ; si unisca q con C e si prolunghi la qC fino in p ; la Bp parallela ad Aq sarà eguale allo sforzo P che avrà luogo in A . — Colla stessa costruzione essendo dato invece P si troverebbe Q . Così pure, quando fosse dato lo sforzo Q che opera in B , la distanza CB e lo sforzo P che potrà esercitare la forza disponibile, prendendo la Bp eguale a questo sforzo P , la Bq' eguale allo sforzo Q ; indi conducendo la pC e la $q'q$ parallela a CB fino all'incontro colla pC si avrà il

¹ Se gli sforzi, che hanno luogo in A e B fossero obliqui rispetto alla AB , i componenti dei medesimi paralleli ad AB darebbero luogo a delle compressioni o trazioni, che dovrebbero essere distrutte dalla resistenza dell'asse di rotazione.

punto q e quindi il punto A , ossia la distanza AC detta il *braccio di leva della potenza*.

Il punto C non trovasi sempre posto fra i punti A e B in cui operano i due sforzi; in alcune leve esso trovasi ad un estremo (leve di 2.^o e di 3.^o genere). Se la leva è destinata ad esercitare una forte pressione, si dovrà evidentemente applicare la resistenza fra la potenza e l'asse (fig. 66.*). Nel caso contrario lo sforzo P sarebbe sempre maggiore dello sforzo Q e quindi l'istromento servirebbe solo per ottenere un movimento più pronto. In ambedue questi casi, del resto, le costruzioni grafiche necessarie per risolvere le varie questioni sono le stesse. Così per trovare lo sforzo esercitato in A , essendo dato quello in B , si prenderà quest'ultimo sforzo da A in q ; si unirà q con C e si avrà in Bp lo sforzo richiesto. Evidentemente una costruzione analoga darebbe lo sforzo Aq , che avrebbe luogo in B , essendo dato quello Bp , che opera in A . Finalmente, essendo dati gli sforzi Bp ed Aq che avranno luogo in A e in B , si troverà il punto C prolungando la qp fino all'incontro della AB

2.^o *Composizione di leve*. — Quando una semplice leva non fosse praticamente possibile per ottenere il voluto rapporto fra lo sforzo esercitato dal motore e quello corrispondente alla resistenza, si compongono insieme varie leve nel modo, per esempio, indicato nella fig. 67.* Chiamando sempre P lo sforzo in A e q, q', Q gli sforzi che vi corrisponderanno in B, B', B'' , noi avremo le seguenti relazioni:

$$P \times \overline{AC} = q \times CB$$

$$q \times \overline{BC'} = q' \times C'B'$$

$$q' \times B'C'' = Q \times C''B''$$

le quali moltiplicate fra di loro danno

$$P \times AC \times BC' \times B' C'' = Q \times \overline{CB} \times \overline{C'B'} \times \overline{C''B''}$$

equazione, dalla quale, essendo note le dimensioni delle varie leve, si ricaverà il rapporto fra P e Q , e quindi P conoscendo Q o viceversa. Questo stesso risultato può essere del resto ottenuto con una semplicissima costruzione grafica. In fatti, condotte le solite parallele pei punti $A, C, B, C', B' C'', B''$, si immagini dapprima il triangolo funicolare I, II, III qualunque ed il suo corrispondente poligono delle forze $\alpha 1 2 O$, in cui $\alpha 1$ è eguale a P e la $1, 2$ (determinata dal raggio $O 2$ parallelo a $III II$) sarà eguale a q . Si formi ora il triangolo $II IV V$ in cui i lati $II IV$ e $II V$ sono in prolungamento dei lati $III II$ e $I II$; si conduca da O il raggio $O 3$ parallelo a $IV V$ e sarà 1.3 eguale a q' . Finalmente si formi allo stesso modo il triangolo $V VI VII$; da O si conduca il raggio $O 4$ parallelo a $VI VII$ e si avrà $1, 4$ eguale allo sforzo Q . Oltre a ciò poi si avrà $\alpha 2$ eguale alla pressione sull'asse C ; $2, 3$ eguale alla pressione sull'asse C' ; e $3, 4$ eguale alla pressione sull'asse C'' . Dal semplice esame poi della figura si vedrà che, volendosi solo determinare lo sforzo Q essendo dato P o anche reciprocamente, non è affatto necessario il condurre le $O 2, O 3$; in tal caso basterà condurre una retta $I VI$, indi una linea poligonale $I III IV VII$, la quale abbia i suoi vertici sopra le parallele condotte per gli assi C, C', C'' e che passi pei punti d'incontro $II V$ della $I VI$ colle parallele passanti per B e B' ; per ultimo si condurrà la $VI VII$, che chiude il poligono. Preso allora $\alpha 1$ eguale a P , e determinato il punto O mediante le parallele $\alpha O, 1 O$ alle $I III, IV I$, si conduca la $O 4$ parallela a $VI VII$ ed in $1, 4$ verrà immediatamente determinato Q . La stessa costruzione varrebbe per il caso in cui fosse dato Q e si cercasse P . Per riguardo al grado di approssimazione che si potrà ottenere nei risultati, gioverà avvertire che esso, oltre che

dalle solite cause, dipenderà dalla precisione colla quale è determinato il punto O , ed inoltre dalla posizione del medesimo rispetto alla $3, 4$ in modo che la $O4$ non riesca ad angolo troppo acuto con essa.

3.° *Carrucole*. — Si chiama generalmente *carrucola* una ruotella a gola i cui perni riposano entro una staffa di ferro e su cui passa una fune o catena, col mezzo della quale si esercitano lo sforzo motore ed il resistente. Vi sono carrucole *fisse* e carrucole *mobili* . Nelle prime l'apparecchio trovasi assicurato mediante la sua staffa ad un punto fisso, mentre ai due capi della fune o catena trovansi applicate la potenza e la resistenza. Nelle seconde invece (fig. 68.°), uno dei capi della fune è fisso ed alla staffa della carrucola viene applicata la resistenza, mentre la potenza agisce sul capo libero della fune.

Nella carrucola fissa la potenza e la resistenza hanno la stessa distanza dall'asse di rotazione; in causa però delle resistenze passive, che sono l'attrito nel perno e la rigidità della fune, la potenza ossia la tensione del tratto di fune motore è maggiore della resistenza, che costituisce la tensione dell'altro tratto. Chiamando adunque D il diametro della ruotella (in centimetri), d il diametro del perno e d' il diametro della fune (pure in centimetri), ed f il coefficiente d'attrito, e ritenendo inoltre l'attrito eguale ad $f \times (P + Q)$ od approssimativamente eguale a $2fP$ o $2fQ$ e si avrà

$$\frac{1}{2} D \times P = \frac{1}{2} D \times Q + 2fQ \frac{d}{2} + 0,26 Q \frac{d'^2}{D} \times \frac{1}{2} D$$

ossia

$$P = Q + 2fQ \times \frac{d}{D} + 0,26 Q \frac{d'^2}{D}$$

Adottando per d' i valori dati dalla tabella presentata nel Cap. X, ossia facendo

$$d' = 0,113 \sqrt{Q}$$

si avrà

$$P = Q + 2fQ \frac{d}{D} + 0,26 \times 0,113 \frac{Q^2}{D},$$

ossia

$$P = Q \left\{ 2f \frac{d}{D} + 0,0034 \frac{Q}{D} \right\}.$$

Ritenendo poi $f = 0,16$, $D = 14$ centimetri, $d =$ centimetri 2 circa, si verrebbe a trovare la formola pratica

$$P = Q(1,045 + 0,00024 Q),$$

dalla quale si ha:

$$\text{Per } Q \quad 100 \text{ chil.} \dots\dots\dots \frac{P}{Q} = 1,07$$

$$» \quad » = 200 \text{ chil.} \dots\dots\dots \frac{P}{Q} = 1,09$$

$$» \quad » = 300 \text{ chil.} \dots\dots\dots \frac{P}{Q} = 1,12$$

$$» \quad » = 400 \text{ chil.} \dots\dots\dots \frac{P}{Q} = 1,14$$

$$» \quad » = 500 \text{ chil.} \dots\dots\dots \frac{P}{Q} = 1,16.$$

— Nella carrucola mobile la ruotella ha un movimento di sviluppo (come quello delle ruote di una carrozza) sul tratto fisso Fa della fune. Considerando adunque lo sforzo P applicato in b e la resistenza Q in c , l'asse di rotazione verrebbe per quest'istante in a , ed allora si avrebbe (trascurando le resistenze passive)

$$P \times ab = Q \times ac = Q \times \frac{D}{2}.$$

Quando i due tratti di fune sono paralleli, a b diventa eguale a D , ed allora si avrebbe

$$P = \frac{Q}{2}.$$

salvo il tener calcolo delle resistenze passive. Ordinariamente la carrucola mobile serve per sollevare dei pesi, ed allora essa va congiunta con una carrucola fissa, la quale serve pel rinvio del tratto di fune b P , onde potere ad esso applicare lo sforzo motore dall'alto al basso. Supponendo che le due carrucole abbiano le dimensioni già fissate precedentemente, si avrà per la pratica

$$P = \frac{1}{2} Q (1,09 + 0,00030 Q)$$

dalla quale si ricavano i seguenti rapporti fra P e Q :

$$\text{Per } Q = 100 \text{ chil.} \dots\dots\dots \frac{P}{Q} = 0,56$$

$$\text{» » } = 200 \text{ chil.} \dots\dots\dots \frac{P}{Q} = 0,57$$

$$\text{» » } = 300 \text{ chil.} \dots\dots\dots \frac{P}{Q} = 0,59$$

$$\text{» » } = 400 \text{ chil.} \dots\dots\dots \frac{P}{Q} = 0,60$$

$$\text{» » } = 500 \text{ chil.} \dots\dots\dots \frac{P}{Q} = 0,62.$$

4.° Taglia. — Come le leve, anche le carrucole si possono combinare insieme formando apparecchi impiegati nel sollevamento dei pesi, i quali permettono di impiegare motori capaci

di esercitare sforzi assai inferiori ai pesi stessi. La più comune di queste combinazioni è quella che si chiama ordinariamente *taglia* e che si impiega da quasi tutti i capi-mastri per l'innalzamento dei materiali nelle fabbriche. La *taglia* (fig. 69.) non è altro che il sistema precedente ripetuto un certo numero di volte; essa consta di una incassatura fissa, la quale riceve un certo numero di carrucole eguali, montate sopra un medesimo asse, e di un' altra incassatura mobile simile affatto alla precedente, alla quale viene attaccato il peso da elevarsi. Per avere dunque il rapporto finale fra Q e P in questa macchina basterà osservare che in essa il peso Q è sostenuto da tanti tratti di fune quant'è il numero totale delle carrucole contenute nelle due incassature. Supponendo adunque che la tensione di ciascun tratto di fune sia la stessa, ed eguale a quella del tratto libero, cioè supponendo che non vi siano resistenze passive, allora Q verrebbe ad essere eguale a tante volte P quant'è il numero totale suddetto delle carrucole, ossia, chiamando n il numero delle carrucole dell'incassatura mobile, sarebbe

$$Q = 2n P.$$

Lo spazio poi percorso da P è $2n$ volte lo spazio percorso da Q ; poichè infatti, se noi tiriamo un metro di fune dalla parte del tratto libero, questo metro viene a togliersi sopra $2n$ tratti della stessa fune e quindi ciascheduno di essi si accorcia di $\frac{1}{2n}$ metri ed il peso Q percorre pure $\frac{1}{2n}$ metri. Considerando però le resistenze passive, allora potremo ritenere approssimativamente

$$P = \frac{Q}{2n} + 4nf \frac{Q}{2n} \frac{d}{D} + 2n \times 0,26 \frac{Q}{2n} \frac{d^4}{D^4},$$

oppure

$$P = \frac{Q}{2n} \left\{ 1 + 4nf \frac{d}{D} \times \frac{0,0034(1 + 0,20n)}{D} \right\} Q.$$

Questa formola, benchè non rigorosa, entro i limiti dei casi ordinari dà risultati abbastanza prossimi al vero per la pratica. Mediante calcoli più esatti, e supponendo $d = 5$, $D = 27$ ed il diametro della fune di 3 centimetri, si otterrebbero i seguenti risultati *:

Per $n =$	2	3	4	5
$\frac{P}{Q} =$	0,333	0,264	0,223	0,200.

Se ora, prendendo per base questi risultati, noi facciamo il confronto fra il lavoro motore ed il lavoro utile dato da questa macchina, troviamo che, per esempio, in una taglia a tre carrucole mobili per un peso Q eguale a 1000 chilogrammi occorrerebbe uno sforzo P di chilogrammi 264. Per un innalzamento poi del peso Q eguale ad 1 metro il lavoro utile sarebbe di chilogrammetri 1000, mentre il lavoro motore sarebbe chilogrammetri $264 \times 6 = 1584$. Si avrebbe dunque una perdita di 584 chilogrammetri sopra 1000 di lavoro utile, il che vuol dire più della metà. Se prendiamo poi una taglia a quattro puleggie, lo stesso rapporto sarebbe di 1000 a 223×8 ossia di 1000 a 1784. Questa perdita di forza motrice, che diventa sempre più grande moltiplicando il numero delle carrucole, non consiglierebbe, a dir vero, l'impiego di questa macchina se non vi fossero altre ragioni, come il poco costo, la facilità di manutenzione, il poco peso ecc., le quali la rendono comunemente usata.

* Si suppone qui per brevità che tutte le ruotelle abbiano la stessa velocità angolare; mentre in fatti le velocità stesse andrebbero crescendo partendo dal tratto di fune fisso e andando al tratto motore.

¹ Vedi REDTEMBACHER, *Resultate für den Maschinenbau*.

Aggiungeremo come complemento il seguente prospetto ¹, dal quale si potranno ricavare le dimensioni principali convenienti per queste macchine.

a) Taglie a corde.

Numero delle carrucole (mobili)	2	3	4
Diametro della corda (in centimetri) . . .	d	d	d
Diametro delle ruotelle	$7d$	$7d$	$7d$
Sforzo di trazione P all'estremità libera della corda	$81d^2$	$81d^2$	$81d^2$
Carico Q che può essere sospeso con sicurezza	$243d^2$	$308d^2$	$365d^2$
Diametro dei perni e dell'asse su cui girano le puleggie	$0,9d$	$1,1d$	$1,2d$

b) Taglie a catene.

Numero delle carrucole C. S.	2	3	4
Diametro del ferro di cui è formata la maglia della catena (in centimetri)	d	d	d
Diametro delle ruotelle	$21d$	$21d$	$21d$
Sforzo di trazione P all'estremità libera della catena	$576d^2$	$576d^2$	$576d^2$
Carico, che può essere sollevato con sicurezza (si intende il massimo)	$1728d^2$	$2177d^2$	$2584d^2$
Diametro dei perni e dell'asse	$3,5d$	$4d$	$4,3d$

5.^a Carrucole differenziali ed epicycloidalì. — Allo scopo di potere, senza aumentare il volume della macchina, ridurre il rapporto fra lo spazio percorso dalla potenza P e quello percorso dal peso Q tanto grande quanto si vuole, si sono modernamente immaginati alcuni tipi speciali di carrucole dette ordinariamente differenziali. Uno di tali tipi è quello, di cui presentiamo un'idea nella fig. 70.* In essa noi vediamo che, insieme ad una carrucola mobile ordinaria, viene combinata una carrucola fissa, la quale consta come di due ruotelle rinnite ed aventi due diametri differenti. Una catena A si av-

¹ Vedi REDTEMBACHER, *Resultate für den Maschinenbau*.

volge sulle dette ruotelle assicurandosi ad appositi uncini fissi sulla periferia della gola e fa il seguente giro: partendo da *A* e seguendo la detta catena nel senso delle frecce, noi vediamo che essa, dopo essere discesa alquanto, si rivolge verso l'alto e viene a passare sulla gola di raggio minore; poi discende dalla parte opposta e viene a passare intorno alla carrucola mobile; indi ritorna in alto e passa sulla gola di raggio maggiore, lasciata la quale, viene finalmente a chiudere il circuito in *A*. Esaminiamo ora che cosa avviene quando, operando in *A* con uno sforzo *P*, si tira in basso la catena mettendo per conseguenza in rotazione la carrucola fissa. Noi troveremo allora che il tratto *B* della catena verrà a salire di quantità eguali agli spazi percorsi da *A*; ma contemporaneamente il tratto *C* discenderà svolgendosi dalla gola di raggio minore. La conclusione sarà che i due tratti di catena *B* e *C* verranno ad accorciarsi complessivamente di una quantità eguale alla differenza fra la catena che è salita in *B* e quella che è discesa in *C*. Il peso *Q* allora sarà salito di metà di questa differenza. Così se, per esempio, il diametro della gola minore fosse 0,9 del diametro dell'altra, tirando in *A* 1 metro di catena, ne salirebbe 1 metro pure in *B*, ma ne discenderebbe 90 centimetri in *C*; dimodochè i tratti di catena *B* e *C*, che sostengono il carico si sarebbero accorciati complessivamente di 10 centimetri ed il carico perciò sarebbe salito di 5 centimetri. Come vediamo adunque, il rapporto fra lo spazio percorso dallo sforzo *P* e dal carico *Q* non dipende con questo sistema che dalla differenza fra i diametri delle due gole della carrucola fissa, rimanendo sempre lo stesso il numero degli avvolgimenti della catena. Quanto al rapporto fra lo sforzo *P* ed il peso *Q*, chiamando *D'* il diametro della gola minore, si avrà che per ogni metro percorso da *P* il carico *Q* percorrerà uno spazio eguale a

$$1.^m \times \left(1 - \frac{D'}{D} \right).$$

Se non vi fossero quindi le resistenze passive, fra P e Q dovrebbe esistere il rapporto inverso di quello che vi è fra gli spazj da essi percorsi; dovrebbe adunque essere:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1 - \frac{D'}{D}}{2} = \frac{D - D'}{2D}.$$

In pratica invece si troverà

$$\frac{P}{Q} = \frac{D - D'}{2D} + k$$

ossia

$$P = Q \frac{D - D'}{2D} (1 + k),$$

nella quale la quantità k dipenderà dalle varie resistenze passive.

Quanto alla determinazione di queste resistenze, noteremo che esse, come nella taglia, si comporranno di due parti:

1.° Dell' attrito sui perni delle due ruotelle;

2.° Degli attriti che avranno luogo fra gli anelli della catena e fra la catena stessa e gli uncini di ferma sulla periferia delle ruotelle, in seguito ai piegamenti che la catena dovrà subire.

Incominciando allora dagli attriti sui perni, osserviamo che la pressione sopportata da ciascuno dei perni stessi può ritenersi eguale a Q per quelli della carrucola mobile, ed eguale a $Q + P$ per gli altri. Supponendo tutti i perni di eguale diametro, e supponendo il diametro della carrucola mobile eguale a D' , riterremo allora la pressione totale eguale a

$$2Q + P,$$

ossia, facendo per il momento

$$P = Q \frac{D - D'}{2D} \times 1,5,$$

la pressione stessa si potrà ritenere

$$2 Q + 1,5 Q \frac{D - D'}{2 D} = Q \left(2 + 1,5 \frac{D - D'}{2 D} \right).$$

Ritenendo il coefficiente d'attrito eguale ancora a 0,16, si avrà allora lo sforzo corrispondente all'attrito sulla periferia dei perni eguale a

$$0,16 Q \left(2 + 1,5 \frac{D - D'}{2 D} \right)$$

e lo sforzo equivalente alla periferia della gola di diametro D , essendo d il diametro dei perni, sarà

$$0,16 Q \left(2 + 1,5 \frac{D - D'}{2 D} \right) \frac{d}{D}.$$

Venendo ora all'altra resistenza, noi supporremo la tensione di ciascun tratto di catena portante il carico eguale a $\frac{1}{2} Q$ e ammetteremo D' come diametro comune alla gola minore ed alla carrucola mobile, chiamando d' il diametro del ferro componente le maglie della catena; finalmente supporremo i tre avvolgimenti fatti coll'eguale tensione. Allora la detta resistenza verrebbe ad essere (vedi Cap. X)

$$f \times Q \times \frac{d'}{D} + f \times Q \times \frac{d'}{D} + f \times \frac{1}{2} Q \times \frac{d'}{D} = 2,5 f Q \frac{d'}{D}$$

e, prendendo

$$f = 0,16,$$

si avrà in tutto

$$0,4 Q \frac{d'}{D}.$$

Riassumendo allora si avrà

$$P = Q \left\{ \frac{D - D'}{2 D} + 0,16 \left(2 + 1,5 \frac{D - D'}{2 D} \right) \frac{d}{D} + 0,4 \frac{d'}{D} \right\},$$

ossia

$$P = Q \left\{ \frac{D - D'}{2D} \cdot \left(1 + 0,24 \frac{d}{D} \right) + 0,32 \frac{d}{D} + 0,4 \frac{d''}{D} \right\}.$$

Se in questa formola noi ammettiamo

$$\frac{d}{D} = 0,10 \quad \text{e} \quad \frac{d''}{D} = 0,035$$

otterremo

$$P = Q \left\{ \frac{D - D'}{2D} \times 1,024 + 0,032 + 0,014 \right\},$$

ossia

$$P = Q \left\{ 1,024 \frac{D - D'}{2D} + 0,046 \right\},$$

formola abbastanza semplice e che può essere sufficiente per casi ordinarii della pratica. Supponendo in essa

D centimetri 30; $D' = 28$; e $Q = 800$ chilogrammi

si avrebbe

$$P = 800 \left\{ 1,024 \frac{2}{60} + 0,046 \right\} = 800 \times 0,080 = \text{chilogr. } 64,$$

mentre, se non vi fossero le resistenze passive, sarebbe stato

$$P = \text{chilogr. } 26,6,$$

dimodochè il rapporto fra l'effetto utile ed il lavoro motore sarebbe del 41,6 per cento.

Questo risultato, certo poco soddisfacente dal lato dell'utilizzazione della forza motrice, ci avverte di non prestar troppo facilmente fede alle grandiose promesse degli inventori e dei costruttori di tali macchine. Benchè il principio ne sia assai ingegnoso, nondimeno in pratica il lavoro consumato special-

mente dall'attrito nei perni riesce assai ragguardevole in causa del molto spazio che percorrono le loro circonferenze in confronto allo spazio percorso dal carico. È ben vero che questo spazio si potrà diminuire facendo grandi i diametri delle ruote, e che anche l'attrito si potrà rendere minore con un accurato mantenimento dei perni stessi; ma bisogna anche osservare che in pratica certe precauzioni non si possono pretendere, tanto più trattandosi di macchine soggette a rimanere per lunghi intervalli fuori d'uso e spesso ad essere deposte nei magazzini delle fabbriche in mezzo alla polvere.

— Dello stesso genere, e soggetto agli stessi inconvenienti, sarebbe un altro tipo di carrucole dette *epicicloidali*, le quali non differiscono da quella che abbiamo descritto, se non nel modo con cui viene ottenuta la differenza di velocità dei due tratti di catena *B* e *C*. In queste carrucole infatti si hanno pure due gole, ma di eguale diametro, ed esse fanno parte di due pezzi montati sullo stesso asse, ma che possono avere un movimento di rotazione l'uno per rispetto all'altro. Immaginiamo ora che col pezzo portante la prima gola sia fusa insieme una corona dentata internamente (vedi fig. 71.), mentre l'altro pezzo porti un pignone pure dentato e capace di ingranare coll'anzidetta corona. Il diametro di questo pignone supponiamo che sia poco minore di quello della corona, e supponiamo che esso abbia un numero di denti eguale a quello della corona meno uno: per esempio, esso abbia 39 denti, mentre la corona ne ha 40. È facile allora il comprendere che, se noi facciamo passare la catena sulle due gole nominate nell'istesso modo che abbiamo già descritto per l'altra carrucola, indi imprimiamo un movimento di rotazione alla gola che porta il pignone, questi farà contemporaneamente ruotare anche la corona e l'altra gola. In causa però della differenza nel numero dei denti della corona e del pignone, avverrà che, quando il pignone avrà compiuto un giro, la corona avrà fatto solo $\frac{39}{40}$ di giro, perchè saranno passati solamente 39 dei

suoi 40 denti, e dalla gola corrispondente si sarà svolta una lunghezza di catena, che sarà $\frac{39}{40}$ di quella contemporaneamente avvolta dall'altra gola. Con ciò adunque i due tratti di catena sostenenti il carico si saranno accorciati complessivamente di $\frac{1}{40}$ dello spazio percorso dal tratto motore, e per conseguenza il carico verrà innalzato di $\frac{1}{2} \times \frac{1}{40}$ ossia di $\frac{1}{80}$ dello spazio percorso dallo sforzo P . In generale, chiamando n il numero dei denti della corona, per ogni metro percorso da P , il carico Q percorrerà $\frac{1}{2n}$ metri, e si avrà

$$P = \frac{Q}{2n} (1 + k)$$

dove k rappresenterà l'ammontare delle varie resistenze passive. Ammettendo l'effetto utile di questa carrucola eguale al precedente, cioè del 41 per cento, si avrà praticamente

$$P = 1,22 \frac{Q}{n}$$

Migliori di quelle ora descritte, sotto il rapporto dell'economia, come anche per la comodità, sono le carrucole che si costruiscono attualmente in Inghilterra, e nelle quali la catena che porta il peso ha una velocità eguale a quella del carico Q , essendo essa indipendente dalla catena motrice. La figura 71.^a presenta un disegno di una delle più semplici di tali carrucole (brevetto dei signori Moore e Head). In essa la ruota o puleggia A porta una gola, nella quale passa la catena motrice senza fine, che, come già abbiamo detto, è indipendente dalla catena che porta il peso, e perciò assai più sottile di essa. Questa pu-

leggia *A* è fusa in un solo pezzo con un pignone dentato *B*, il quale si appoggia contro una corona *C* dentata internamente, e con essa viene ad ingranare. La corona *C* poi fa corpo colla ruotella a gola intorno alla quale passa la catena che porta il peso. Mettendo allora in rotazione la puleggia *A*, mediante la catena a mano, il pignone *B* farà girare la corona e quindi la carrucola propriamente detta. Se il carico sarà attaccato direttamente ad uno dei tratti della catena *portante*, la velocità del medesimo, per rispetto a quella della catena, motrice si troverà come segue: supponendo che la catena motrice abbia percorso 1 metro, la periferia della puleggia *A* avrà pure percorso 1 metro, e la periferia del pignone, essendo nel disegno il diametro di questo un quarto di quello della puleggia, avrà percorso un quarto di metro. Essendo poi il numero dei denti del pignone eguale a 12 e quello della corona eguale a 16, si comprenderà facilmente che, per ogni giro fatto dal pignone, la corona avrà fatto solo $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ di giro. Perciò quando la periferia ¹ del pignone avrà percorso un quarto di metro, la periferia della corona avrà percorso $\frac{3}{16}$ di metro. Finalmente, essendo il diametro della corona $\frac{19}{10}$ di quello della carrucola, lo spazio percorso alla periferia di quest'ultima, e quindi lo spazio percorso dal carico, sarà $\frac{10}{19} \times \frac{3}{16} = \frac{30}{304}$ di metro, ossia 0^m,0985. Il rapporto adunque fra la velocità della catena motrice e quella del carico sarà di circa $\frac{1}{10}$. — In generale, chiamando *D* il diametro della puleggia *A* (il diametro della gola, più quella della catena); *D'* quello della carrucola *E*; *n* il numero dei denti della

¹ Nelle ruote dentate, parlando di periferie o di diametri s'intendono ordinariamente le circonferenze *primitive* di contatto, ossia le circonferenze che passerebbero circa a metà dell'altezza dei denti.

corona, n' il numero dei denti del pignone, trascurando le resistenze passive, si avrà

$$P D = 2 \frac{n'}{n} D'.$$

Tenendo conto delle resistenze passive, cioè degli attriti nei perni, di quello fra i denti del pignone e della corona, e di quello fra le maglie delle catene, si verrebbe a trovare che l'effetto utile di questa macchina è circa del 58 al 60 per 100; dimodochè si potrebbe ritenere praticamente

$$P = 1,81 \frac{D'}{D} \frac{n'}{n}.$$

Se noi adunque confrontiamo questa carrucola colle precedenti a movimento differenziale, troveremo facilmente che, se da un lato con essa non possiamo spingere oltre un certo limite il rapporto fra lo spazio percorso dalla potenza e quello percorso dalla resistenza, dall'altra parte abbiamo un vantaggio in ciò che la catena motrice, avendo semplicemente una velocità eguale a quella del peso, oltre al risparmiare il maggiore lavoro resistente cagionato dagli attriti nelle sue maglie, si logora assai meno; d'altra parte la catena motrice, non dovendo resistere che allo sforzo P , può essere più leggera, e perciò produce essa pure minori resistenze. Finalmente, quando si volesse usare questa carrucola come una ordinaria, non si avrebbe che ad attaccare il carico alla stessa catena motrice.

— Un'altra carrucola, il cui meccanismo, altrettanto ingegnoso quanto semplice, rinnova i vantaggi della precedente alla possibilità di raggiungere un rapporto grandissimo fra lo spazio percorso dalla potenza e quello percorso dal carico, è quella di Eade. Questa carrucola (figure 72.^a, 73.^a, 74.^a, 75.^a e 76.^a) consta anch'essa di una puleggia A di diametro più o meno grande, sulla quale si accavalla una catena motrice senza fine.

La detta puleggia è fusa con un disco eccentrico *B* (fig. 76.*), e su questo è infilato un pignone *C* (fig. 75.*), il quale ha nel suo rovescio un disco munito degli opportuni risalti destinati ad appoggiarsi contro una guida *D* (fig. 76.*), che trovasi applicata contro il medesimo. Finalmente vi è una corona *E* (figura 74.*) dentata all'interno, colla quale è fusa la ruotella *F*, su cui si accavalla la catena portante il carico. Tutti questi pezzi sono montati sopra uno stesso albero e mantenuti entro un'apposita incassatura, come si vede nella fig. 73.* Ecco ora il modo con cui funziona questo meccanismo. Agendo sulla catena motrice, noi mettiamo in rotazione l'eccentrico *B*, e questo, colla sua periferia, trasporta il pignone *C*, il quale, non potendo ruotare, perchè dalla guida *B* è mantenuto sempre parallelo a sè stesso, prende il movimento seguente: partendo dalla posizione indicata nella fig. 76.* e supponendo che l'eccentrico giri verso destra, il pignone verrà prima portato in alto e verso sinistra durante il primo quarto di rotazione, poi ancora in alto, ma verso destra; poi in basso e verso destra, e per ultimo in basso e verso sinistra. In conclusione, un punto qualunque del pignone verrà, in un'intera rotazione dell'eccentrico, a descrivere una circonferenza di raggio eguale all'eccentricità del disco, cioè alla distanza fra il centro di pignone del disco e il suo asse di rotazione: poniamo ora che la distanza fra mezzo e mezzo dei denti della corona *E* sia precisamente eguale allo sviluppo della circonferenza ora detta; in tal caso avverrà che il pignone, trasportato dall'eccentrico, verrà successivamente ad ingranare colla corona e farà percorrere alla circonferenza media di questa uno spazio eguale all'intervallo fra due denti per ogni giro dell'eccentrico, e quindi per ogni giro della puleggia motrice. Se adunque noi supponiamo che la corona abbia 10 denti, ne verrà che, per ogni giro della puleggia motrice, la ruotella portante il peso, la quale è fusa colla corona, farà un decimo di giro. Chiamando in generale *D* il

diametro della puleggia motrice (misurato dall'asse della catena), D' il diametro della gola della ruotella F (compresovi pure quello della catena), n il numero dei denti della corona, e supponendo che la puleggia motrice abbia fatto un giro, lo spazio percorso dallo sforzo motore P sarà πD , mentre lo spazio percorso dal carico sarà $\frac{\pi D'}{n}$. Se non vi fossero adunque resistenze passive, si dovrebbe avere

$$P \times D = Q \times \frac{D'}{n}.$$

Volendo calcolare le perdite di forza motrice che sarebbero dovute alle varie resistenze passive chiamiamo ancora D'' il diametro medio della corona dentata, d il diametro del perno, d' il diametro dell'eccentrico, d'' il diametro del ferro di cui sono formate le maglie della catena portante, d''' il diametro del ferro di cui sono formate le maglie della catena motrice; e ricordiamo che l'eccentricità del disco è eguale al raggio della circonferenza, il cui sviluppo misura la distanza fra due denti consecutivi della corona, ossia è eguale a

$$\frac{\pi D''}{2\pi} = \frac{D''}{2}.$$

Ciò posto, noi dovremo considerare le seguenti resistenze passive:

1.° Attrito nel perno, il quale dovrà distinguersi in due parti, l'una prodotta dalla puleggia motrice, che vi esercita una pressione all'incirca eguale a P ; l'altra dovuta alla ruotella portante, che esercita sul perno una pressione eguale a Q . Essendo adunque f il coefficiente d'attrito, sarà fP l'attrito dovuto alla prima parte, e lo spazio da esso percorso per un giro

della puleggia motrice sarà πd ; l'attrito dovuto alla seconda parte sarà parimenti $f Q$, e lo spazio da esso percorso sarà $\frac{\pi d}{n}$.

2.° L'attrito che avrà luogo sulla periferia del disco eccentrico. La pressione che il pignone eserciterà contro questo disco si potrà ritenere eguale a quella che i denti del medesimo esercitano contro i denti della corona: questa pressione sarà dunque eguale a

$$Q \times \frac{D'}{D''}$$

o meglio, tenendo conto delle resistenze passive che, oltre al carico utile questa pressione dovrà equilibrare, a

$$Q(1 + \alpha) \times \frac{D'}{D''}$$

o prossimamente a

$$1,3 Q \frac{D'}{D''},$$

e l'attrito corrispondente sarà allora

$$1,3 f Q \frac{D'}{D''},$$

il quale percorrerà uno spazio eguale a $\pi d'$, sempre per ogni giro della puleggia motrice.

3.° L'attrito che avrà luogo contro le due braccia orizzontali della guida D (fig. 76.°). Essa infatti, dovendosi opporre alla rotazione del pignone C , dovrà sostenere due pressioni eguali e contrarie sulle nominate braccia. Queste pressioni si potranno approssimativamente ritenere eguali ciascheduna a Q , e quindi l'attrito che ne deriva sarà

$$2 f Q$$

e lo spazio da esso percorso per un giro della puleggia motrice sarà eguale a quattro volte l'eccentricità, ossia a

$$4 \frac{D''}{2n} = 2 \frac{D''}{n}.$$

4.° L'attrito dovuto al movimento dei denti del pignone rispetto ai denti della ruota. Considerando questo sistema come un ingranaggio ordinario di un pignone con una corona interna, si avrebbe

$$F \text{ (attrito in chilogr.)} = f p \pi \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) \text{ (vedi Cap. X).}$$

Nel nostro caso p , ossia la pressione esercitata contro i denti, sarebbe, come già si è detto più sopra,

$$1,3 Q \frac{D'}{D''};$$

n' poi verrebbe ad essere eguale al nostro n , cioè al numero dei denti della corona, ed n verrebbe ad essere eguale ad $n-1$. Allora quest'attrito, calcolato alla periferia di contatto dei denti del pignone con quelli della corona, sarebbe

$$1,3 \times 3,14 f Q \frac{D'}{D''} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right).$$

Lo spazio poi che esso percorrerebbe, appoggiandosi all'ipotesi fatta, ed osservando che in una oscillazione del pignone tutti i denti di esso vengono successivamente a contatto con quelli della corona, si potrebbe ritenere eguale a

$$\pi D'',$$

sempre per ogni giro della puleggia motrice.

5.° Per ultimo avremo da considerare l'attrito fra le maglie delle due catene. Servendoci delle formole esposte al Capitolo X, i detti attriti risulteranno:

Per la catena portante

$$2 f Q \frac{d''}{D'};$$

Per la catena motrice

$$2 f P \frac{d''}{D'},$$

calcolati entrambi sulle periferie delle rispettive puleggie. Lo spazio poi che percorrerà ciascheduna di esse sarà:

Per la prima

$$\frac{\pi D'}{n};$$

Per la seconda

$$\pi D.$$

Riassumendo adunque, durante il movimento della carrucola di Eade e nello stato di equilibrio della medesima, noi dovremo calcolare per ogni giro della puleggia motrice i seguenti lavori motori e resistenti:

1.° Il lavoro della *potenza*, che sarà

$$P \times \pi D.$$

2.° Il lavoro del carico sollevato, il quale sarà

$$Q \times \pi \frac{D'}{n}.$$

3.° Il lavoro consumato dall'attrito sul perno (vedi n. I), che abbiamo trovato

$$f P \times \pi d + Q f \times \frac{\pi d}{n} = f \pi d \left(P + \frac{Q}{n} \right).$$

4.° Il lavoro consumato dagli attriti sul disco (vedi n. II), che sarà

$$1,3 f Q \frac{D'}{D'} \times \pi d'.$$

5.° Il lavoro dello sfregamento contro le braccia della guida (vedi n. III):

$$2 f Q \times 2 \frac{D''}{n} = 4 f Q \frac{D''}{n}.$$

6.° Il lavoro dell'attrito nei denti (vedi n. IV):

$$\begin{aligned} 1,3 \times 3,14 f Q \frac{D'}{D''} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \times \pi D'' = \\ = 4,08 f Q D' \times \pi \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

7.° Per ultimo il lavoro dell'attrito fra le maglie delle catene, che è (vedi n. V):

$$2 f Q \frac{d''}{D'} \times \pi \frac{D'}{n} + 2 f P \frac{d''}{D} \times \pi D$$

ossia

$$2 f P \left(Q \frac{d''}{n} + P d'' \right).$$

L'equazione di equilibrio adunque di questa macchina sarebbe la seguente:

$$\begin{aligned} P \times \pi D = Q \times \pi \frac{D'}{n} + f \pi d \left(P + \frac{Q}{n} \right) + \\ + 1,3 f Q \frac{D'}{D'} \times \pi d' + 4 f Q \frac{D''}{n} + \\ + 4,08 f Q D' \pi \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ + 2 f \pi \left(Q \frac{d''}{n} + P d'' \right). \end{aligned}$$

Dividendo tutti i termini per π e raccogliendo i fattori comuni, avremo

$$P(D - fd - 2fd''') = Q \left\{ \frac{D'}{n} + f \frac{d}{n} + 1,3 f \frac{D'}{D} d' + \right. \\ \left. + \frac{4f}{\pi} \frac{D''}{n} + 4,08 f D' \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + 2f \frac{d''}{n} \right\}$$

o più concisamente:

$$P \{ D - f(d + 2d''') \} = Q \left\{ \frac{D}{n} + f \left(\frac{d}{n} + 1,3 \frac{D}{D} d' + 1,27 \frac{D''}{n} + \right. \right. \\ \left. \left. + 4,08 D' \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + 2 \frac{d''}{n} \right) \right\}.$$

Se in questa formola noi poniamo i seguenti valori numerici, cioè:

$D = \text{cent. } 8,5$	$d = \text{cent. } 1,9$
$D' = \text{ » } 7,0$	$d' = \text{ » } 3,7$
$n = 10$	$d'' = \text{ » } 0,5$
$D'' = \text{cent. } 10,0$	$d''' = \text{ » } 0,3$

e supponiamo il coefficiente d' attrito eguale a 0,16, valore che può convenire in media per simili macchine, otteniamo:

$$P[8,5 - 0,16(1,9 + 0,6)] = \\ = Q[0,7 + 0,16(0,19 + 1,3 \times 0,7 \times 3,7 + \\ + 1,27 \times 1 + 4,08 \times 7,0(\frac{1}{4} - \frac{1}{10}) + 0,1)]$$

ossia, eseguendo le calcolazioni:

$$P \times 8,1 = Q \times 1,54$$

o

$$P = Q \times 0,19.$$

Se invece si escludessero le resistenze passive si avrebbe

$$P \times 8,5 = Q \times 0,7$$

e

$$P = Q \times 0,082.$$

Il rendimento utile sarebbe dunque nel rapporto di 0,082 a 0,190 cioè del 43 per cento. In un'esperienza, che io stesso feci nella Scuola Professionale di Biella sopra una piccola carrucola appartenente alla Società di Incoraggiamento d'arti e mestieri in Milano e avente le dimensioni sopra scritte, trovai che uno sforzo motore di chil. 14,1 (rappresentato da un peso equivalente) fece equilibrio, nello stato prossimo al moto, ad un carico di chil. 77,6. Ora, facendo $P = 14,1$, nella formola esposta, si avrebbe $Q = \text{chil. } 74,2$. Questo risultato pratico verrebbe pienamente in conferma della nostra formola, tanto più se osserviamo che, essendo state prima dell'esperienza unte di olio le parti sfregantisi, il coefficiente d'attrito poteva ritenersi minore allora di quello che noi l'abbiamo supposto.

Noi possiamo adunque concludere che anche in queste carrucole l'effetto utile non può praticamente ritenersi superiore al 43 per cento del lavoro motore e che esso può facilmente discendere di molto quando lo stato della macchina non sia soddisfacente, come si può scorgere dall'esame della formola esposta. Ad onta di ciò queste carrucole possono prestare ottimi servizi specialmente nelle costruzioni, atteso il loro piccolo volume e la facilità con cui possono essere collocate in opera e manovrate. La carrucola Eade poi nella sua ingegnosa disposizione presenta il vantaggio di avere due uncini alle due estremità della catena portante (fig. 72.^a), dimodochè, mentre il carico sale, l'altro uncino discende per trovarsi pronto a ricevere il nuovo carico. Oltre a ciò dobbiamo osservare che il carico, anche abbandonato a sè stesso, rimane sospeso; poichè,

come è facile lo scorgerlo dall'esame delle figure, una pressione qualunque esercitata dal pignone sul disco eccentrico non può mai dar luogo ad un moto rotatorio di quest'ultimo.

Le carrucole di Eade, della forma che abbiamo descritta, si costruiscono dalla casa Eade e figlio, di varie dimensioni calcolate per portare da un quarto di tonnellata a due tonnellate. Se ne costruiscono poi altre di maggiore portata destinate ad essere mosse dall'alto mediante un ingranaggio, ed altre ancora, le quali con ingranaggi combinati, si promettono atte a portare fino ad otto tonnellate con due uomini.

Con ciò credo di essermi abbastanza esteso su questo argomento non ritenendo opportuno di dilungarmi più oltre, descrivendo le tante altre carrucole dello stesso genere che furono immaginate, tanto più che le migliori di esse, come quelle di *Pickering* e di *Head e Moore* non differiscono gran fatto nella loro composizione come nei loro risultati dall'ultima descritta, benchè sia differente il principio su cui basa il loro movimento.

6.^o *Verricelli, burbere, argani, ecc.*

Sotto questi nomi si comprende una serie di macchine destinate in generale a sollevar pesi, le quali tutte constano di un tamburro di legno o di ghisa, intorno a cui si avvolge una fune che porta il carico; il tamburro poi riposa sopra due perni e viene messo in rotazione mediante un meccanismo qualunque atto a rendere lo spazio percorso dalla potenza più lungo che lo spazio percorso dalla resistenza ossia dalla fune. È a seconda del modo che si impiega per girare l'apparecchio, che esso prende le sue denominazioni particolari. Così esso si chiama verricello comune od anche *tornio* (parola più propriamente destinata ad altro meccanismo) quando il suo albero viene fatto girare mediante una o due manovelle; si chiama invece d'ordinario *burbere* quando in luogo delle manovelle si impiega una ruota intorno a cui si accavalla una fune come nella fig. 77.* Finalmente si chiama *argano* quando il suo al-

bero è verticale (fig. 78.^a) ed il suo movimento rotatorio viene prodotto agendo sopra leve o braccia infisse nell'albero stesso. Oltre a queste disposizioni comunemente in uso, allo scopo di accrescere lo spazio percorso dalla potenza in confronto a quello percorso dalla resistenza, si impiegavano e si impiegano talvolta ancora delle grandi ruote montate sullo stesso albero che porta la fune, e munite alla loro periferia di risalti o piuoli, sui quali un uomo si appoggia facendo continuamente l'atto di salire una scala. In altri casi invece la ruota è foggjata a tamburro ed all'interno porta una serie di cordoni, in modo che un uomo od anche un cavallo vi si possa muovere dentro come camminando sopra una salita a cordoni. Tutti questi però sono meccanismi, che erano assai ingegnosi ed utili quando la meccanica era nella sua infanzia, ma che non si potrebbero per alcun modo ammettere oggidì se non che per casi eccezionali. Noi vedremo più innanzi come, senza ricorrere a quei meccanismi imbarazzanti e materiali, e a quel modo poco ragionevole di impiegare la forza motrice dell'uomo, si possano ottenere gli stessi ed anco migliori risultati mediante gli ingranaggi.

Per altro, anche senza oltrepassare i meccanismi che si impiegavano nei tempi andati, possiamo accennare un altro tipo di verricello, il cui principio assai ingegnoso ha dato origine poi alle carrucole differenziali che abbiamo già studiato; è questo il verricello detto *differenziale* o *chinese*. In esso (fig. 79.^a) l'albero sul quale si avvolge la fune è diviso in due parti che hanno diametro differente; la fune scende dalla parte dell'albero di maggiore diametro, passa sulla gola di una carrucola mobile, poi risale e va a prendere la parte dell'albero di diametro minore. La stessa fune poi è così disposta su questi due tamburri che, girando l'apparecchio in senso opportuno, essa si avvolge sull'uno e si svolge dall'altro. È evidente che con ciò la lunghezza totale di fune che rimane al di sotto del

tamburro, dopo fatto un giro, sarà eguale a quella che s'aveva prima, meno o più la differenza fra le circonferenze delle due parti dell'albero, a seconda che si sarà girato l'apparecchio in modo da svolgere la fune dall'albero minore oppure dal maggiore. Il carico poi salirà, o scenderà, come già sappiamo, di metà di questa differenza; cosicchè vediamo che, rendendo piccola la differenza dei diametri dei due tamburri, si potrà rendere piccola quanto si vuole la velocità del carico in confronto di quella dello sforzo motore, cosa che del resto avevamo già vista.

Veniamo ora a calcolare le relazioni che si hanno fra lo sforzo motore ed il carico sollevato in questi diversi meccanismi.

a) *Verricello semplice*. — Chiamiamo P lo sforzo motore, l la lunghezza della manovella oppure delle braccia o il raggio della ruota, o in generale la distanza del punto d'applicazione dello sforzo P dall'asse di rotazione; dimodochè sarà $2l$ il diametro della circonferenza descritta dallo stesso P ; inoltre chiamiamo Q il carico sollevato oppure lo sforzo utile di trazione esercitato, D il diametro del tamburro; d quello dei perni (l, D, d in centimetri). Osservando allora che la pressione esercitata sui perni sarà presso a poco eguale al carico Q , lo sforzo P esercitandosi, sia colle manovelle che colle braccia, talvolta in un senso e tal'altra in senso opposto; inoltre, supponendo il diametro della fune determinato colla formola solita, si avrà

$$P \times 2l = Q \times D + f Q d + \frac{0,0034 Q^2}{D} D,$$

ossia

$$P = Q \left\{ \frac{D}{2l} + f \frac{d}{2l} + \frac{0,0034}{2l} Q \right\}.$$

Il valore di P rappresentato in questa formola può essere trovato mediante una costruzione grafica assai semplice. Si

faccia (fig. 80.°) AB eguale al diametro dei perni, AC eguale al diametro del tamburro aumentato di quello della fune (scala di 1 mill. per cent.). Condotte le solite parallele per A , B , C e la $ax \dots$ parallela alle medesime, si prenda aq eguale al carico che si vuol sollevare; indi si porti $q1$ eguale a

$$0,0034 \frac{Q^2}{D} = \frac{1}{3} \times 0,01 \frac{Q^2}{D} = \frac{1}{3} \times 0,1 \frac{Q^2}{10D}.$$

Per trovare questo $q1$ si prenda sulla $qQ \dots$ perpendicolare ad $ax \dots$ la qQ eguale a Q ; indi da q in m si prenda il diametro D in iscala decupla di quella impiegata per Q (basterà prendere la scala degli sforzi di 1 mill. per 10 chil., essendo quella dei diametri di 1 mill. per cent., come già si è detto). Si unisca allora m con Q e si tracci la Qx perpendicolare ad mQ ; si avrà con ciò

$$qx = \frac{Q^2}{10D}^1.$$

Prendendo il decimo e quindi il terzo di qx si avrà la $q1$. Se si credesse più comodo si potrebbe anche fare $qm = 3 \times 10D$ con che basterebbe poi prendere il decimo della qx . Trovato così il punto 1 si faccia 1,2 eguale ad $\frac{1}{10}$ di aq e si avrà il punto 2; finalmente sulla stessa perpendicolare $qQ \dots$ si prenda qQ eguale a $2l$, si congiunga il punto O così trovato coi punti a , 1, 2 e si tracci il poligono $I II III IV$ in modo che sia $I II$ parallela ad aO ; $II III$ parallela ad $1O$ e $III IV$ parallela a $2O$. Si avrà allora $I IV$ eguale a P . In fatti, considerando i soliti triangoli simili, si troverebbe che

$$I IV = \frac{\bar{a}1 \times \bar{A}C + 1,2 \times AB}{qO} = \\ = \frac{\left(Q + 0,0034 \frac{Q^2}{D} \right) D + fQd}{2l}.$$

¹ La perpendicolare condotta dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa è media proporzionale fra i due segmenti dell'ipotenusa.

La stessa costruzione potrebbe servire per determinare il diametro AC , essendo dati lo sforzo P ed il carico Q , nonchè gli altri elementi. In tal caso, costrutta la figura $a12O$ e fatto AB eguale al diametro dei perni, nonchè IV eguale a P , si conduca la $I II \dots$ parallela ad aO ; indi la $IV III$ e la $III II \dots$ la quale ultima incontrerà la $I II \dots$ nel punto II , il quale determinerà così il punto C . Per trovare invece il carico Q oppure il valore di $2l$, converrebbe risolvere prima il problema senza tener calcolo dell'attrito, indi rettificare il risultato. Così per trovare Q si potrà condurre la $I II$ qualunque, e sulla aO parallela a questa si prenderà il punto O distante dalla $ax \dots$ di $2l$. Conducendo allora da O la parallela alla $II IV$, questa verrà a passare in y fra 1 e 2 e determinerà così un valore di Q più o meno maggiore del vero. Si prenda un decimo di questo e lo si porti in seguito da y in $2'$; indi si conduca da IV la parallela ad $O2'$, la quale darà un punto assai prossimo al punto III . Condotta finalmente da O la parallela alla $II III$ così determinata, questa verrà a cadere, all'incirca, in 1. Con ciò si sarà trovato il valore di Q aumentato della rigidità della fune. Volendo trovare il carico netto basterà, mediante la costruzione grafica sopra descritta, determinare il valore di $q1$, che si dovrà sottrarre dalla $a1$.

In questi casi, come assai spesso nella pratica, torna assai utile il conoscere già *a priori* il rapporto fra il lavoro utile, che somministra la macchina, ed il lavoro motore impiegato. Con ciò basterebbe risolvere i varj problemi senza tener calcolo delle resistenze passive ed applicare poi ai risultati il coefficiente sopra accennato. Pel caso del verricello, che stiamo esaminando, ammettendo il coefficiente d'attrito di 0,10 ed il rapporto fra il diametro dei perni e quello del tamburro circa $\frac{1}{10}$, per carichi da 100 a 500 chil., si ha un lavoro utile da 0,90 a 0,94 del motore, o in altri termini la macchina rende del 90 al 94 per cento circa di lavoro utile.

b) *Argano*. — Nell'argano, come abbiamo già visto, l'albero è verticale e perciò il peso proprio di esso e dei suoi accessori viene sopportato da una *ralla*, sulla quale avrà luogo un attrito proporzionale a questo peso. Lo sforzo poi di trazione della fune, che supporremo orizzontale, darà una pressione orizzontale sul perno inferiore ed un'altra contro il collare superiore. Finalmente lo sforzo P , supposto pure orizzontale, e che si eserciterà all'estremo delle braccia o leve, si combinerà pure colla trazione sopra nominata modificando le pressioni dipendenti dalla trazione stessa sul perno e sul collare. Con ciò l'albero dell'argano verrà a trovarsi nelle condizioni dell'albero presentato nella fig. 54.* Atteso però il continuo cambiamento di direzione dello sforzo P , come già abbiamo fatto precedentemente, noi ne trascureremo gli effetti, quanto alle pressioni sui perni. Ciò posto, per determinare queste pressioni, poniamo che sia AB (fig. 81.*) l'asse dell'albero ed A e B i punti di mezzo del collare e del perno inferiore; sia inoltre C la posizione media della fune di trazione. Si faccia allora BQ eguale a Q sforzo di trazione della fune; si tracci la AQ e si avrà Cq eguale alla pressione sul perno B ; e per conseguenza $BQ - Cq$ sarà eguale alla pressione sul collare A . Ora si faccia AL eguale alla lunghezza delle braccia o meglio alla distanza fra il punto d'applicazione dello sforzo P e l'asse di rotazione; $A d$ eguale al raggio del perno inferiore; $A d'$ eguale al raggio del collare; $A D$ eguale al raggio del tamburro aumentato di quello della fune. Si conducano per L, A, d, d', D le solite parallele; indi si faccia LQ eguale al carico o sforzo di trazione da effettuarsi; poi la QI eguale a

$$\frac{0,0034 Q^2}{D},$$

il che si potrà ottenere graficamente mediante la costruzione già indicata; in seguito si prenda $1,2$ eguale all'attrito sul

perno B ($\frac{1}{30}$ di Cq); 2,3 eguale all'attrito sul collare A ($\frac{1}{17}$ di $Bq - Cq$). Preso un punto O ed uniti con esso i punti L , 1, 2, 3 si tracci nel modo ordinario il poligono $L I H I H I V$. Condotta allora la Op parallela a IVL , si avrà in Lp lo sforzo motore. Nella figura 81,* si è supposta la scala per le lunghezze di 1 millimetro per centimetro e quella per gli sforzi di 1 millimetro per 10 chilogrammi. Per determinare poi la $Q1$ si è preso Ly eguale a tre volte AD , ossia, nella scala degli sforzi, a 30 D : conducendo allora la Qx perpendicolare a Qy si avrà Lx eguale a

$$\frac{1}{30} \frac{Q^2}{D},$$

prendendo poi il decimo di Lx si è ottenuto la $Q1$ richiesta.

È facile l'intendere come, colla stessa costruzione grafica, essendo invece data prima la Lp e quindi la Op , conducendo la IVL parallela ad Op si verrebbe ad ottenere il punto L e quindi la lunghezza delle leve necessaria per avere il voluto rapporto tra lo sforzo motore e quello resistente.

Verricello differenziale. — Chiamiamo, come al solito, P lo sforzo motore, Q il carico sollevato, ed inoltre l la lunghezza della manovella, sulla quale si esercita lo sforzo motore, D il diametro maggiore del tamburro, D' il minore e d il diametro dei perni, ed osserviamo che il carico Q in questa macchina, essendo portato da due tratti di fune, dà luogo nei medesimi a due tensioni, che riterremo eguali ciascheduna ad $\frac{1}{2} Q$ e che, per la disposizione particolare della fune, avranno momenti di segno contrario. In altri termini, il carico Q per metà tende a far girare il tamburro in un senso, e per l'altra metà tende a farlo girare in senso opposto. Perciò, scrivendo la solita equazione dei momenti, avremo:

$$P \times 2l = \frac{1}{2} Q \times D - \frac{1}{2} Q \times D' + 2 f Q d + 0,0034 Q^2,$$

nella quale $\frac{1}{2} Q D$ rappresenta il momento resistente dovuto alla

metà del carico, che tende ad opporsi alla rotazione, che la potenza comunica all'apparecchio; $\frac{1}{2} Q D$ il momento dell'altra metà del carico, il quale tende a far girare il tamburro in senso opposto; $2 f Q D$ il momento dell'attrito sui perni del tamburro e su quelli della carrucola mobile, che per semplicità riteniamo tutti di eguale diametro; finalmente $0,0034 Q^2$ rappresenta il momento resistente dovuto alla rigidezza della fune nei suoi tre avvolgimenti sul tamburro e sulla carrucola. Quest'ultimo termine fu trovato supponendo la tensione di ciascun tratto di fune eguale a $0,576 Q$ (essa è infatti in pratica maggiore della metà del carico) e inoltre ammettendo che il diametro della carrucola sia eguale a quello minore del tamburro. Infatti noi avremo allora il momento della rigidezza della fune per l'avvolgimento sul tamburro di maggiore diametro eguale a

$$\frac{0,0034 \times (0,576 Q)^2}{D'} \times D = 0,0034 \times 0,33 Q^2;$$

per l'avvolgimento sull'altra tratta del tamburro avremo pure

$$\frac{0,0034 (0,576 Q)^2}{D'} \times D' = 0,0034 \times 0,33 Q^2$$

e lo stesso risultato si otterrà per l'avvolgimento sulla carrucola. Prendendo allora tre volte la quantità

$$0,0034 \times 0,33 Q^2$$

si otterrà appunto

$$0,0034 Q^2$$

pel momento complessivo della rigidezza della fune.

Raccogliendo il fattore Q nella formola esposta si ottiene più concisamente

$$P \times 2l = Q \left\{ \frac{D - D'}{2} + 2fd + 0,0034 Q \right\}.$$

Facendo in essa $Q = 500$ chilogr.; $l = 40$ cent.; $D = 30$ cent.; $D' = 25$ cent.; $d = 4$ cent. ed $f = 0,12$ si avrebbe $P = \text{chil. } 32,5$. Se invece non vi fossero resistenze passive si dovrebbe avere

$$P \times 2l = Q \frac{D - D'}{2}$$

ossia

$$P = \text{chilogr. } 15,6.$$

Il rendimento utile adunque di questa macchina nelle condizioni supposte sarebbe circa del 48 per cento, il che mostra che questa macchina apparentemente tanto semplice non è delle più economiche per ciò che riguarda la forza motrice.

Anche per questa macchina possiamo applicare con vantaggio una costruzione grafica consimile alle precedenti.

Si prenda perciò sopra una retta $AD \dots$ (fig. 82.°) AB eguale al diametro dei perni; $AC \dots$ eguale al diametro minore del tamburro; AD eguale al diametro maggiore del medesimo, e pei punti $ABCD$ si facciano passare le solite parallele; indi sopra una retta xy parallela a queste ultime si prenda $a1$ eguale ad $\frac{1}{2}Q$; quindi, mediante la costruzione grafica già descritta e che trovasi accennata sulla figura si determini la quantità

$$\frac{0,0034 Q'}{D'}$$

e la si porti da a in 2 ; finalmente si porti da 2 in 3 la quantità $2fQ$, la quale, assumendo f eguale a circa $0,12$, risulterà $\frac{1}{2}$ di $a1$. Con ciò si avrà in $a1$ lo sforzo $\frac{1}{2}Q$ il cui momento è resistente; in $1a$ l'altro sforzo $\frac{1}{2}Q$ il cui momento riesce favorevole alla potenza in $a2$ lo sforzo resistente dovuto alla rigidità della fune, in 23 lo sforzo resistente dovuto all'attrito nei perni. Si prenda allora il punto O distante dalla

xy del doppio della lunghezza della manovella e si costruisca il poligono $I II III IV V$ nel quale sarà $I II$ parallelo ad Oa , $II III$ parallelo ad $O1$, $III IV$ parallelo ad $O2$, $IV V$ parallelo ad $O3$. Il lato $I V$ rappresenterà lo sforzo P che si dovrà esercitare sulla manovella per elevare il carico Q .

Colla stessa costruzione grafica, quando fosse dato $P Q$ si potrebbe determinare uno dei diametri del tamburro. Infatti in tal caso sarebbe noto il lato $I V$, e non rimarrebbe che a determinarsi la posizione di uno dei vertici II, III , il che si otterrà mediante l'intersezione dei relativi lati contigui.

7.^o *Verricello ad ingranaggi.* — Nel verricello semplice noi abbiamo visto come il rapporto di velocità fra la potenza e il carico venga limitato in pratica dalle dimensioni possibili del tamburro e della manovella o della ruota motrice. Onde potere oltrepassare questo limite senza eccedere nelle dimensioni dell'apparecchio, noi possiamo ricorrere agli ingranaggi. Infatti se noi immaginiamo sull'albero della manovella (fig. 83.^a) montato un pignone, cioè una piccola ruota dentata, e facciamo in modo che questo pignone venga ad ingranare con una ruota grande pure dentata e montata sull'albero del tamburro, ne verrà evidentemente che, mentre la manovella ha compiuto un giro, la ruota grande ed il tamburro non avranno fatto che una frazione di giro. Più precisamente, chiamando n il numero dei denti del pignone, n' il numero dei denti della ruota, l la lunghezza della manovella e D il diametro del tamburro, lo spazio percorso dalla potenza per un giro di manovella sarà $2\pi l$; il tamburro invece non avrà intanto compiuto un giro, ma solo avrà percorso una frazione di giro eguale ad $\frac{n}{n'}$; siccome poi un giro intero del tamburro corrisponderebbe ad uno spazio di πD , così risulterà che, mentre la manovella motrice fa un giro, il carico avrà percorso uno spazio eguale a

$$\frac{n}{n'} \times \pi D.$$

Perciò se il lavoro motore si trasmettesse senza resistenze passive si dovrebbe avere

$$P \times 2\pi l = Q \times \frac{n}{n'} \times \pi D$$

ossia

$$2Pl = Q \frac{n}{n'} D.$$

Essendo la grossezza dei denti costante nelle due ruote che compongono l'ingranaggio, il numero dei denti di ciascuna ruota dipende dal suo diametro, e perciò il rapporto $\frac{n}{n'}$ è anche il rapporto fra i diametri delle ruote stesse. Questo rapporto nelle macchine del genere che consideriamo è in generale all'incirca di $\frac{1}{10}$. Qualora il rapporto di velocità fra la potenza e la resistenza che risulterebbe con una semplice coppia di ingranaggi non fosse sufficiente, si ricorrerebbe ad un secondo ingranaggio, montando la ruota grande sopra un secondo albero ausiliario, sul quale sarebbe pure montato un secondo pignone, il quale poi verrebbe ad ingranare con un'altra ruota grande montata sull'albero del tamburro. In tal caso, chiamando n'' il numero dei denti del secondo pignone ed n''' il numero dei denti della seconda ruota grande, il rapporto di velocità fra il 3.° albero ed il 2.° sarà $\frac{n''}{n'''}$ e quindi il rapporto di velocità fra il 3.° albero (ossia quello del tamburro) ed il 1.° (cioè quello della manovella) sarà $\frac{nn''}{n'n'''}$. In tal caso avremo allora, trascurando le resistenze passive,

$$2Pl = Q \frac{nn''}{n'n'''} D.$$

Ordinariamente, quando si hanno due copie di ingranaggi, il pignone motore può avere un movimento parallelamente all'asse

dell'albero, mediante il quale si può a volontà servirsi dei due ingranaggi, oppure anche trasmettere il movimento al tamburro con un ingranaggio solo, ciò che si fa per accrescere la velocità del carico, quando questo non è molto forte.

Volendo tener calcolo delle resistenze passive, l'equazione di equilibrio per un verricello a semplice ingranaggio sarebbe la seguente:

$$2Pl = Q \frac{n}{n'} D + fNd + fQd' \frac{n}{n'} + \\ + fN\pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) D' + fQd'' \frac{n}{n'}.$$

nella quale N sarebbe la pressione esercitata sui denti dell'ingranaggio; d il diametro dei perni del 1.^o albero; d' quello dei perni del 2.^o albero; D' il diametro del pignone; d'' il diametro del ferro di cui sono formate le maglie della catena. Il termine fNd rappresenta allora il momento dell'attrito sui perni del primo albero; $fQd' \frac{n}{n'}$ il momento dell'attrito sui perni del 2.^o albero; $fN\pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) D'$ il momento dell'attrito fra i denti (vedi Cap. X), e finalmente $fQd'' \frac{n}{n'}$ rappresenta l'attrito fra le maglie della catena. Raccogliendo i fattori comuni ed osservando che, chiamando D'' il diametro della ruota grande, si può ritenere

$$N = Q \frac{D}{D'},$$

e che si avrà inoltre

$$D' = \frac{n}{n'} D''$$

e

$$D' = D \frac{n'}{n},$$

si otterrà

$$2Pl = Q \left\{ \frac{n}{n'} D + f \left[d \frac{D}{D'} + d' \frac{n}{n'} + \pi D \frac{n}{n'} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) + d'' \frac{n}{n'} \right] \right\}$$

ossia

$$2Pl = Q \frac{n}{n'} D \left[1 + f \left\{ \frac{d}{D'} + \frac{d' + d''}{D} + \pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) \right\} \right].$$

Ponendo per un esempio che si abbia

$$l = \text{cent. } 40; \quad D = 30; \quad D' = 11; \quad D'' = 99;$$

$$d = 3; \quad d' = 5; \quad d'' = 1,3; \quad n = 10;$$

$$n' = 90; \quad f = 0,10; \quad Q = 800 \text{ chilogr.},$$

dalla formola suesposta si avrà

$$P \times 80 = 800 \times 3,33 \times 1,086 = 2894,$$

da cui

$$P = \frac{2894}{80} = \text{chilogr. } 36,5$$

Se non vi fossero state le resistenze passive si sarebbe invece ottenuto

$$P = \frac{2665}{80} = \text{chilogr. } 33,3.$$

Il rapporto adunque fra il lavoro utile ed il lavoro motore sarebbe il 92 per cento, rapporto certo assai grande, tanto più se lo confrontiamo con quelli forniti dalle macchine precedentemente descritte.

Il valore di P trovato mediante la formola precedente si può calcolare graficamente colla costruzione indicata nella fig. 84.* In essa AC è eguale alla lunghezza della manovella; BC è eguale al raggio del perno del primo albero; CD al raggio del pignone; DC' al raggio della ruota; $C'E$ al raggio dei perni del secondo albero; $C'F$ al raggio del tamburro; inoltre si ha

$\alpha 1$ eguale al carico Q , più la rigidezza della fune o l'attrito fra le maglie della catena; $1,2$ eguale ad $\frac{1}{16} Q$. Per tracciare poi il poligono funicolare si è tirata la trasversale qualunque III e la $a O$ parallela alla medesima, indi la $II III$ parallela ad $O 1$ e la $III IV$ parallela ad $O 2$, e si è unito il punto IV con V . Condotta allora la $O 3$ parallela a $IV V$, si è ottenuto in $\alpha 3$ la pressione N che ha luogo sui denti dell'ingranaggio. Si è preso poi $3,4$ eguale all'attrito nei denti $f N \pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right)$ e $4,5$ eguale all'attrito $f N$ sui perni. Condotta quindi la $V VI$ parallela ad $O 4$, la $VI VII$ parallela ad $O 5$ e da ultimo la $VII I$, che chiude il poligono, tirando la $O p$ parallela a questa, si è ottenuto in ap lo sforzo P motore necessario per sollevare il carico dato. È inutile il ripetere come la stessa costruzione grafica possa servire anche per risolvere altri problemi, nei quali l'incognita da determinarsi sia un altro qualunque degli elementi della macchina.

Il verricello munito di ingranaggi riceve in molti casi il movimento direttamente da una macchina a vapore speciale, ordinariamente a due cilindri, i quali trasmettono il loro movimento direttamente alle due manovelle. In tal caso, piuttosto che la pressione esercitata sulla manovella, può interessare di conoscere la forza in cavalli-vapore, che deve fornire la macchina onde sollevare un carico dato, facendo gli stantuffi un dato numero di colpi per minuto. Conoscendosi la pressione P che dovrebbe essere esercitata sulla manovella, la lunghezza l della medesima ed il numero n dei giri (corrispondenti ai colpi di stantuffo in andata e ritorno) la forza motrice in chilogrammetri per minuto secondo sarebbe

$$P \times 2 \pi l \times \frac{n}{60}$$

essendo P dato in chilogr., e l in metri. La stessa forza poi in cavalli-vapore sarebbe

$$P \times 2 \pi l \times \frac{n}{60 \times 75} .^1$$

Nella figura 85.* supponiamo che sia AC la lunghezza della manovella dal centro del bottone a quello dell'albero; CB il raggio dei perni del 1.° albero; CD quello del pignone; DC' il raggio della ruota; $C'E$ quello dei perni del 2.° albero; $C'F$ quello del 2.° pignone; $F'C''$ il raggio della 2.° ruota; $C''G$ il raggio del perno corrispondente, e finalmente $C''H$ il raggio del tamburro. Sia poi aq il carico da sollevarsi e sia tracciato nel solito modo il poligono funicolare $I H I I I V V V I V I I I X X I$. Se allora sarà Op parallela a XI , noi sappiamo che ap sarà la pressione (media) esercitata sulla manovella. Oltre a ciò ricordiamo che la Xm sarebbe eguale ad ap moltiplicato per AC e diviso per la distanza h del punto O dalla $a 2$ (pag. 88). Supponendo che le pressioni e le distanze siano prese nella stessa scala, noi avremo dunque

$$Xm = \frac{Pl}{h}.$$

La distanza h essendo arbitraria noi potremo prenderla tale che Xm rappresenti direttamente il prodotto

$$P \times 2 \pi l \frac{n}{60 \times 75},$$

* La pressione P si suppone qui sempre normale alla manovella, mentre nel caso della macchina a vapore ciò non avviene che in due punti. Ammesso però che il sistema sia costruito in modo che il movimento vi abbia luogo continuo ed uniforme, in tutte le posizioni in cui lo sforzo della biella non è normale alla manovella, fatta astrazione dai due punti morti, lo sforzo stesso si potrà decomporre in due, l'uno normale alla manovella e l'altro nel senso di questa, il quale ultimo verrà distrutto contro i collari del perno. Da ciò l'unico inconveniente che si produrrà sarà un aumento d'attrito contro il perno stesso; del resto il lavoro fornito dalla macchina sarà sempre il prodotto della componente della pressione normale alla manovella per la velocità della medesima e nella nostra formola P rappresenterebbe la pressione media.

vale a dire il numero di cavalli-vapore a cui equivale la forza motrice chè deve essere fornita dalla macchina. Percio basta fare

$$h = \frac{60 \times 75}{2 \pi n} = \frac{716,5}{n}.$$

Praticamente non converrà in generale prendere la stessa scala per le pressioni come per le lunghezze; in tal caso però, osservando che nell'espressione $\frac{Pl}{h}$ noi possiamo moltiplicare l ed h per uno stesso numero senza che cambi il rapporto $\frac{l}{h}$, ne deduciamo che si potrà prendere per le lunghezze una scala qualunque diversa da quella delle pressioni, purchè si prenda anche h in questa stessa scala e si misuri invece la Xm colla scala adoperata per le pressioni. Viceversa, se convenisse meglio prendere h nella scala impiegata per le pressioni, si misurerebbe allora Xm colla scala delle lunghezze. Questa costruzione potrebbe servire per studiare gli ingranaggi di trasmissione necessarj onde poter sollevare un dato carico con una motrice di data forza e con un dato numero di colpi di stantuffo per minuto.

8.° *Vite*. — Si chiama ordinariamente vite un corpo cilindrico intorno al quale si avvolge una sporgenza in forma di elica (fig. 86.*). Questa sporgenza viene ricevuta entro una cavità della stessa forma e delle stesse dimensioni, la quale è praticata in un altro corpo detto la *madrevite*. Supponendo allora che la madrevite sia fissa e che la vite prenda un moto di rotazione intorno al proprio asse, ne verrà che, un punto dell'elica sporgente della vite dovendo percorrere successivamente i varj punti dell'elica in incavo della madrevite, la vite stessa prenderà un moto di traslazione rispetto alla madrevite, percorrendo per ogni giro uno spazio eguale al *passo dell'elica*, cioè alla distanza fra una spira e la seguente. Talora in luogo

di essere fissa la madrevite, è questa che si muove e la vite è fissa, ed altre volte l'una riceve il moto di rotazione e l'altra prende il moto di traslazione; in tutti questi casi però il modo di agire dell'una sull'altra è lo stesso. Quanto alla loro costruzione le viti si potrebbero distinguere in due principali categorie, in quelle cioè in cui la sporgenza elicoidale o *filetto* ha una sezione rettangolare (fig. 86.) e in quelle in cui il filetto è triangolare o più o meno smussato nei vertici.

La vite è un organo che ha moltissimi usi nella meccanica. Essa fa parte dei varj *bulloni*, che servono a tener collegate e serrate insieme le varie parti componenti i pezzi delle macchine e delle costruzioni in genere dalle più grandi alle più minute. Per la sua proprietà di avere un doppio movimento rotatorio e di traslazione, piccolissimo quest'ultimo se si vuole a fronte del primo, la vite serve negli istromenti di precisione per muoverne le parti di intervalli piccolissimi, per misurare colla massima esattezza piccolissime distanze, per ottenere minutissime suddivisioni di linee; nel mentre che essa comprime e schiaccia le materie nei torchi, serve a dar moto alle navi e financo a trasportare da un punto in un altro intere case colle loro fondazioni.

In tutti questi diversi uffici la vite si trova sempre sotto l'azione di una potenza, la quale agisce ad una certa distanza dall'asse e tende ad imprimere ad essa od alla sua madrevite un moto di rotazione, e di una resistenza, la quale opera parallelamente all'asse della vite, e che anzi potremo ritenere nella precisa direzione di questo, opponendosi al moto di rotazione che deriverebbe dal moto rotatorio impresso dalla potenza. Per comprendere meglio il modo con cui nella vite la potenza e la resistenza trasmettono vicendevolmente la loro azione, consideriamo per un momento la superficie cilindrica concentrica alla vite che passerebbe per il mezzo della sporgenza del filetto. Questa superficie cilindrica spiegata in un piano (figuriamoci

che essa sia un foglio di carta) darà un rettangolo la cui base sarà eguale allo sviluppo della circonferenza, che ne formava prima la sezione retta, cioè di quella circonferenza che avrebbe per raggio la distanza media dell'elica dall'asse. Su questo rettangolo l'elica verrà a formare una retta inclinata per rispetto alla base e l'angolo che essa formerà colla base stessa è quello che chiameremo *l'angolo dell'elica*. In virtù di questa inclinazione la retta rappresentante l'elica andrà elevandosi per rispetto alla base, del rettangolo supposta orizzontale; l'elevazione totale, che avrà luogo da un estremo all'altro del rettangolo è quello che chiameremo il *passo della vite* ed essa formerà appunto la distanza fra due spire consecutive dell'elica quando il supposto rettangolo sia di nuovo ravvolto in modo da ricostituire la superficie cilindrica.

Con questo modo di considerare la vite facilmente si potrà comprendere che essa non viene a differire essenzialmente da un piano inclinato, come quello di cui abbiamo già fatto cenno parlando della misura del coefficiente d'attrito (fig. 60.*). Figuriamoci infatti una strada inclinata rettilinea; essa non è altro che un piano inclinato nella sua più semplice espressione; immaginiamo ora che questa strada, conservando sempre la stessa inclinazione sull'asse, si avvolga facendo parecchi giri intorno ad un colle in modo che il suo asse venga a formare più o meno prossimamente un'elica, ed allora quella strada ci porgerà l'idea di una vite. Più prossimamente ancora noi potremo avere l'idea di una vite in una scala a chiocciola e potremo dire che la vite sta al piano inclinato ordinario come una scala a chiocciola sta ad una corrispondente scala rettilinea. Da tutto ciò risulta adunque che le stesse considerazioni relative al movimento di un corpo sopra un piano inclinato valgono anche per la vite, la cui complicazione si riduce ad essere più nella forma che nell'essenza.

Ciò posto, incominciamo dal considerare un piano inclinato

(fig. 60.*) e supponiamo che il corpo A , il cui peso sia $A p$ debba salire lungo il piano in virtù di un'azione motrice, che supporremo aver luogo sul medesimo in direzione orizzontale. Il peso $A p$, come già si è detto (vedi Cap. X), si scompone in una pressione $p N$ perpendicolare al piano e in uno sforzo $A N$, il quale tende a far discendere il corpo, e che quindi si oppone all'azione motrice. La pressione $p N$ poi dà luogo all'attrito, il quale pure si oppone all'azione motrice e che, come sappiamo, è proporzionale a $p N$. La resistenza locale adunque che l'azione motrice deve vincere per far salire il corpo A sul piano inclinato sarà rappresentata da

$$A N + f \times p N;$$

e se la forza motrice agisce parallelamente al piano, basterebbe che essa fosse eguale alla quantità sopra notata per mantenere l'equilibrio, cioè il movimento uniforme del corpo. Ma siccome noi abbiamo supposto che la forza motrice agisca orizzontalmente, in tal caso essa pure dovrebbe essere scomposta in due azioni, l'una parallela al piano, l'altra normale, la quale ultima verrebbe poi ad aggiungersi alla pressione $p N$ e ad aumentare così l'attrito del corpo A sul piano. In questo caso adunque l'equilibrio avrebbe luogo quando lo sforzo motore parallelo al piano fosse eguale allo sforzo $A N$ più la resistenza proveniente dall'attrito prodotto sia dalla pressione $p N$ che dall'altra derivata dall'azione motrice. Chiamando N' quest'ultima pressione e P lo sforzo motore parallelo al piano, si dovrebbe dunque avere:

$$P = A N + f (p N + N').$$

Tutto ciò può essere calcolato colla massima facilità ed esattezza graficamente; se però si volesse determinare P con calcoli numerici, chiamando α l'angolo del piano coll'orizzontale,

Q il peso del corpo ed F lo sforzo totale esercitato sul corpo stesso dall'azione motrice, si avrebbe:

$$P = Q \sin a + f(Q \cos a + F \sin a).$$

Ora che abbiamo esaminato particolarmente le condizioni di equilibrio di un corpo che si muove sopra un piano inclinato, veniamo ad applicare le stesse considerazioni alla vite che per brevità riterremo a filetto quadrangolare. Supponiamo che la AB (fig. 87.) rappresenti la pressione Q , che ha luogo, come si è detto, parallelamente all'asse della vite, pressione dovuta alla resistenza che la vite deve vincere per muoversi parallelamente all'asse stesso: supponiamo ancora che l'angolo CBA sia eguale all'angolo dell'elica della vite come pure l'angolo EAD . Allora sarà AC la componente della pressione Q parallela all'elica (piano inclinato) e BC la pressione normale. Si prenda allora CD eguale a BC moltiplicato per il coefficiente d'attrito che si adotta e la AD rappresenterà allora la quantità che avevamo già rappresentato con $AN + f \times pN$. Si conduca ora la DE perpendicolare ad AD e la AE sarà prossimamente eguale allo sforzo motore P , che dovrebbe agire sulla circonferenza del cilindro contenente l'elica mediana. Diciamo *prossimamente*, poichè in realtà se questo sforzo motore, come infatti si è supposto, agisce nel piano della sezione retta del cilindro, e quindi la sua direzione fa un angolo EAD con quella dell'elica, la pressione DE normale all'elica, che ne deriva, dovrebbe essere aggiunta alla BC e l'attrito CD dovrebbe farsi eguale al coefficiente d'attrito moltiplicato per la somma delle pressioni BC e DE . La piccolezza però della pressione DE rispetto alla BC permette in generale di trascurare l'attrito prodotto dalla medesima.

Per trovare adunque graficamente lo sforzo P che si dovrebbe effettuare sulla periferia del cilindro contenente l'elica mediana

onde equilibrare durante il movimento la resistenza Q incontrata da una vite, si tracci prima la AE ; poi si conduca la AB perpendicolare ad essa ed eguale a Q ; si tracci quindi la BC in modo che faccia colla AB un angolo eguale a quello dell'elica della vite data e la AD che faccia l'angolo EAD eguale a CBA ; si porti da C in D la CD eguale ad $\frac{1}{10}$ di BC se la vite in ferro è convenientemente spalmata di olio, oppure ad $\frac{1}{4}$ di BC se la vite è di legno; finalmente si conduca la DE perpendicolare a DA e la AE sarà lo sforzo cercato. Qui però osserviamo che, essendo in generale lo sforzo Q assai grande per rispetto a P , ne verrà che, volendo rappresentare P in iscala sufficientemente grande, la AB riuscirà spesso eccessivamente lunga. Per evitare questo inconveniente si potrebbe fare la AB eguale ad $\frac{1}{2} Q$, come in fatto si ha nella figura, facendo l'angolo CBA doppio di quello dell'elica; con ciò si potrà ritenere che la CA verrà a riescire abbastanza prossimamente la stessa che facendo la costruzione regolare, mentre la CB riescirà la metà della pressione normale. Quanto al disegnare l'angolo dell'elica, la cosa si riduce, come già si è detto, alla formazione di un triangolo rettangolo di cui un cateto sarà eguale a 3,14 volte il diametro corrispondente all'elica mediana e l'altro cateto al passo della vite; l'angolo allora che l'ipotenusa di questo triangolo farà col primo cateto sarà l'angolo richiesto. Se ora noi supponiamo che la potenza non agisca sulla periferia dell'elica mediana, ma ad una distanza qualunque l dall'asse, per trovare lo sforzo P' che vi corrisponderebbe a quella distanza basterebbe condurre da A la perpendicolare AO eguale ad l ; prendere da O la parte OM eguale al raggio r dell'elica mediana e la MN parallela ad AE sarebbe il P' richiesto.

Con questa costruzione grafica abbastanza semplice si possono con facilità e con sufficiente esattezza risolvere i varj problemi risguardanti l'equilibrio meccanico della vite. Qualora però si

volessero calcolare le accennate quantità numericamente, si potrebbe impiegare la formola generale

$$P = Q \frac{r}{l} \frac{h + 2\pi r f}{2\pi r - fh},$$

nella quale con P intendiamo lo sforzo motore che ha luogo ad una distanza l dall'asse e con h il passo della vite.

Supponendo che il passo h sia $\frac{1}{4}$ circa del raggio r , come si verifica prossimamente nelle viti dei *bulloni* adoperati per la unione dei varj pezzi delle macchine, e supponendo il coefficiente f eguale a 0,10, si otterrebbe

$$P = Q \frac{r}{l} \times \frac{3,51}{25} = 0,14 Q \frac{r}{l},$$

od anche si potrebbe ritenere

$$P = Q \frac{r}{l} \frac{h}{1,6r} = Q \frac{h}{1,6l},$$

nella quale basterebbe conoscere il passo della vite e la distanza l dall'asse al punto d'applicazione dello sforzo P sul braccio di leva (*chiave*) che serve a girare la vite. Osservando che se non vi fossero le resistenze passive si dovrebbe avere

$$P = Q \frac{h}{2\pi l},$$

sarà facile il trovare che nelle formole suesposte il lavoro utile viene ad essere calcolato il 39 per cento del motore. Esso poi diverrebbe in fatto assai minore quando il coefficiente d'attrito in luogo di 0,10, come si è supposto, dovesse prendersi maggiore; la ragione di questa rilevante perdita di forza motrice sta in ciò, che in questo meccanismo l'attrito viene a percorrere uno spazio assai grande comparabilmente con quello percorso dalla resistenza. Egli è perciò che questo organo, il quale riesce indispensabile ogni volta che si devono vincere forti pressioni

percorrendo piccoli spazj, riesce poco conveniente quando si voglia impiegare come mezzo di trasmissione per movimenti continuati.

Nei calcoli che abbiamo fatto fin qui sulla vite noi abbiamo supposto che il filetto della medesima fosse quadrangolare; dimodochè la pressione normale all'elica riesce in un piano parallelo all'asse. Quando invece il filetto fosse di forma triangolare, la pressione stessa formerebbe con questo piano un angolo eguale a quello che uno dei lati della sezione triangolare del filetto fa coll'altezza del triangolo stesso. Vi sarebbe adunque in questo caso una maggiore complicazione per ciò che la pressione resistente Q parallela all'asse dovrebbe essere scomposta due volte in luogo di una per dedurne la pressione normale all'elica. Noi però crediamo di poterci dispensare da questi maggiori dettagli, terminando qui questi esempj, dai quali crediamo che si sarà potuto abbastanza chiaramente rilevare il metodo da tenersi nel calcolare le condizioni di equilibrio dei vari pezzi delle macchine.

Allo scopo di facilitare sempre più le calcolazioni occorrenti nella risoluzione dei problemi, risparmiando possibilmente il tempo e la noia dei conteggi numerici, abbiamo unito a questo Manuale una piccola raccolta di tabelle, nelle quali si troveranno:

1.° I lavori medii e giornalieri che possono produrre i motori animati in diverse circostanze. (Tav. II.)

2.° Le lunghezze degli archi di circolo supposto il raggio eguale ad 1; dimodochè basterà moltiplicare i numeri trovati sulla tavola per il raggio dato onde ottenere la lunghezza dell'arco dato. (Tav. III.)

3.° Le lunghezze degli archi di circolo dato il rapporto fra la saetta dell'arco e la corda; i numeri trovati in questa tabella si moltiplicheranno per il valore assoluto della corda e si avrà la lunghezza dell'arco che ha la data corda e la data saetta. (Tav. IV.)

4.° I pesi specifici delle varie sostanze. (Tav. V.)

5.° Le velocità acquistate da un grave cadendo da altezza data. (Tav. VI.)

6.° Le potenze, le radici, i reciproci di molti numeri, nonchè vari altri dati numerici e trigonometrici interessanti. (Tavole VII e VIII.)

Per ultimo, onde agevolare agli studiosi il ritenere a memoria le varie definizioni, principj e formole elementari della meccanica, le si sono raccolte sotto forma di una tabella (Tavola I.), persuasi che questa potrà essere utile ad ajutare la memoria per chi ha già studiato nel testo le formole e definizioni stesse.

TAVOLA I.

Prospetto riassuntivo delle principali definizioni e formole.

- 1.° Il movimento è il successivo cambiamento di posizione nello spazio —.

Una forza motrice non è che una causa capace di convertire del calore in movimento esterno.

Il lavoro di una forza o la forza impiegata per ottenere un movimento è misurata dal prodotto della pressione o sforzo locale per lo spazio percorso dal punto in cui questa pressione si verifica —. La pressione si misura in chilogrammi; la forza in chilogrammetri.

Ogni lavoro meccanico prodotto corrisponde ad un consumo corrispondente di calore, e viceversa ogni scomparsa di lavoro meccanico corrisponde ad una produzione equivalente di calore. — Una caloria, cioè il calore necessario per elevare di un grado centigrado la temperatura di un chilogrammo d'acqua, equivale ad un lavoro di 423 ch. l m. l.

- 2.° La massa è il rapporto costante fra il peso di un corpo e l'accelerazione di velocità che la gravità comunica al medesimo per ogni minuto secondo. Essa è una quantità proporzionale al numero di particelle materiali contenute nel corpo.

- 3.° La pressione corrispondente ad una data variazione (aumento o diminuzione) di velocità per minuto secondo prodotta in una data massa è data dalla formola

$$f = M \varphi;$$

come pure si ha

$$\varphi = \frac{f}{M} \quad \text{e} \quad M = \frac{f}{\varphi}.$$

- 4.° Nel moto uniforme si ha

$$v = \frac{s}{t}; \quad s = vt; \quad t = \frac{s}{v}.$$

Nel moto uniformemente accelerato si ha

$$v = v_0 + \varphi t; \quad s = v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2,$$

e quando $v_0 = 0$

$$v = \varphi t; \quad s = \frac{1}{2} \varphi t^2; \quad v = \sqrt{2 \varphi s}; \quad s = \frac{v^2}{2 \varphi}.$$

Nel moto uniformemente ritardato si ha

$$v = v_0 - \varphi t; \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} \varphi t^2, \quad \circ$$

e lo spazio totale percorso è

$$s = \frac{v_0^2}{2 \varphi}.$$

- 5.* Si chiama *potenza viva* il prodotto della metà della massa del corpo in moto pel quadrato della sua velocità $\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$.

La potenza viva acquistata o perduta da un corpo in movimento è eguale al lavoro motore o resistente prodotto nel corpo stesso nel tempo considerato.

- 6.* Si chiama *coppia* un sistema di due sforzi paralleli eguali e contrarii, ma non direttamente opposti.

Il *centro delle forze parallele* è il punto pel quale passano i risultanti di un sistema di sforzi paralleli per varie direzioni dei medesimi.

Il *centro di gravità* è il centro delle forze parallele quando queste sono i pesi delle varie particelle di un corpo.

Nel centro delle forze parallele si possono intendere applicati tutti gli sforzi componenti il sistema. — Nel centro di gravità si può ritenere come concentrato l'intero peso del corpo.

- 7.* In un sistema che ruota intorno ad un asse il *momento di una forza* è il prodotto dello sforzo corrispondente alla medesima in un piano perpendicolare all'asse di rotazione per la distanza della direzione di questo dall'asse suddetto.

In un sistema di forze parallele si chiama *momento di una forza rispetto ad una retta parallela alle forze stesse* il prodotto dello sforzo locale corrispondente per la distanza di esso da questa retta.

Il *momento d'inerzia* di un punto materiale è il prodotto della sua massa pel quadrato della sua distanza dall'asse di rotazione —. Il momento d'inerzia di un corpo si ottiene moltiplicando la sua massa pel quadrato del suo raggio di girazione.

8.° La forza centrifuga, la quale si sviluppa in ogni corpo che ruota, si calcola mediante la formola

$$f = M \frac{v^2}{R},$$

oppure

$$f = M \omega^2 R.$$

9.° Il lavoro consumato dall'attrito sopra un perno orizzontale è

$$0,0523 f P d n \text{ ch. l m. l per minuto secondo}$$

essendo f il coefficiente d'attrito, P la pressione normale, d il diametro (in metri) ed n il numero dei giri al minuto primo.

Per un perno verticale sulla sua ralla si ha

$$0,0349 f P d n \text{ ch. l m. l per " ;}$$

e, comprendendosi anche l'attrito contro il collare prodotto da uno sforzo trasversale P' , si ha la perdita totale

$$f d n (0,0523 P + 0,0349 P') \text{ ch. l m. l per minuto secondo.}$$

Per un albero verticale che si appoggia sopra un collare piano, per l'attrito sulla superficie anulare del collare, si ha (essendo l la larghezza della medesima e d il diametro medio)

$$0,0523 f P n \left(d + 0,33 \frac{l^2}{d} \right) \text{ ch. l m. l per " .}$$

La rigidezza delle funi è data dalla formola

$$R = 0,26 Q \frac{d^3}{D} \text{ ch. l}$$

per le funi di canape, e

$$R = 0,58 Q \frac{d^3}{D} \text{ ch. l}$$

per le funi in ferro; essendo Q lo sforzo di trazione che sopporta il tratto di fune che si avvolge, d e P i diametri della fune e del tamburro in centimetri.

Ammettendo che il diametro della fune di canape sia dato dalla formola

$$d = 0,113 \sqrt{Q} \text{ centimetri,}$$

si ha la rigidezza

$$R = \frac{0,0034 Q^2}{D}.$$

Per le catene la resistenza dovuta all'attrito, che ha luogo fra le maglie, contata sulla periferia del tamburro si può ritenere eguale a

$$fQ \frac{d}{D},$$

dove d è il diametro del ferro di cui è fatta la catena.

Quando il tamburro è munito di denti di ferma la resistenza totale si può ritenere

$$2fQ \frac{d}{D}.$$

La resistenza opposta dall'aria al movimento di un corpo prismatico è

$$0,0720 \times s v^2$$

essendo s la sezione massima del corpo perpendicolarmente al movimento e v la velocità del medesimo.

Per un corpo nell'acqua essa è

$$k s v^2$$

dove k è eguale a 57 per un prisma; per le navi da 17 a 8.

TAVOLA II.

Lavori medii e giornalieri che possono produrre i motori animati
in diverse circostanze.

NATURA DEL LAVORO	Sforzo medio	Velocità	Lavoro per secondo	Durata del lavoro giorna- liero	Lavoro prodotto in un giorno
	Ch. ¹	Metri	Ch. ¹ m. ¹	Ore	Ch. ¹ m. ¹
1.°					
Un manuale, innalzando verticalmente un peso con una corda e una puleggia, dovendo far ridiscendere la sua corda per riprendere altro peso	18	0,20	3,6	6	77760
Idem sollevando i pesi colla mano	20	0,17	3,4	6 *	73440
Idem portando i pesi sulle spalle risalendo mediante una rampa dolce o mediante una scala, indi ritornando scarico	65	0,04 *	2,6	6	56160
Idem servendosi di una carrucola e salendo una rampa all' 1 per 12, indi ritornando scarico	60	0,02 *	1,2	10	43200
Idem elevando della terra colla pala all' altezza di 1 ^m ,60	2.7	0,40	1,08	10	38880
2.°					
Un manuale agendo sopra una ruota a caviglie o a tamburro					
1.° A livello dell' asse della ruota	60	0,15	9	8	259200
2.° Verso il basso	12	0,70	8,4	8	241920

* S' intende qui la velocità nel senso verticale

NATURA DEL LAVORO	Sforzo medio	Velocità	Lavoro per secondo	Durata del lavoro giornaliero	Lavoro prodotto in un giorno
	Ch. ¹	Metri	Ch. ¹ se. ¹	Ore	Ch. ¹ m. ¹
Un manuale spingendo o tirando orizzontalmente e di continuo	12	6,60	7,2	8	207360
Idem agendo sopra una manovella	8	0,75	6	8	172800
Un uomo spingendo e tirando alternativamente nel senso verticale	6	0,75	4,5	10	162000
Un cavallo attaccato ad un carro (al passo)	70	0,90	63	10	216000
Idem al trotto	44	2,20	96,8	4,5	1168160
Un cavallo impiegato a muovere un meccanismo (al passo e girando continuamente) . .	45	0,90	40,5	8	1166400
Un bue nello stesso lavoro	60	0,60	36	8	1036800
Un mulo c. a.	30	0,90	27	8	777600
Un asino c. a.	14	0,80	11,2	8	322560
3.° *					
Un manuale trasportando orizzontalmente dei materiali in una carretta a due ruote e ritornando scarico	100	0,50		10	
Idem con una carriuola c. a. .	60	0,50		10	
Un uomo trasportando dei carichi sulle spalle e ritornando scarico	65	0,50		6	
Un lavorante che getta della terra a quattro metri di distanza orizzontale	2,7	0,68		10	
Un cavallo caricato sulla schiena andando al passo . .	120	1,10		10	

* Trattandosi di un trasporto orizzontale il prodotto dei numeri delle prime due colonne non dà più il lavoro prodotto per minuto secondo, poichè lo sforzo esercitato non è eguale al peso trasportato, ma solo ad una frazione del medesimo. Perciò ommettiamo di esporre le cifre della terza e della quinta colonna.

TAVOLA III.

Lunghezza degli archi di circolo di raggio 1.

Gradi	Lunghezza	Gradi	Lunghezza	Gradi	Lunghezza	Gradi	Lunghezza	Gradi	Lunghezza
1	0,01745	21	0,36652	41	0,71558	61	1,06465	81	1,41372
2	0,03491	22	0,38397	42	0,73304	62	1,08210	82	1,43117
3	0,05236	23	0,40143	43	0,75049	63	1,09956	83	1,44862
4	0,06981	24	0,41888	44	0,76794	64	1,11701	84	1,46608
5	0,08726	25	0,43633	45	0,78540	65	1,13446	85	1,48353
6	0,10472	26	0,45379	46	0,80285	66	1,15191	86	1,50098
7	0,12217	27	0,47124	47	0,82030	67	1,16937	87	1,51844
8	0,13963	28	0,48869	48	0,83776	68	1,18682	88	1,53589
9	0,15708	29	0,50615	49	0,85521	69	1,20428	89	1,55334
10	0,17453	30	0,52360	50	0,87266	70	1,22173	90	1,57079
11	0,19198	31	0,54105	51	0,89012	71	1,23918	100	1,74533
12	0,20944	32	0,55851	52	0,90757	72	1,25664	110	1,91986
13	0,22689	33	0,57596	53	0,92502	73	1,27409	120	2,09439
14	0,24434	34	0,59341	54	0,94248	74	1,29154	130	2,26893
15	0,26180	35	0,61087	55	0,95993	75	1,30899	140	2,44346
16	0,27925	36	0,62832	56	0,97738	76	1,32645	150	2,61799
17	0,29670	37	0,64577	57	0,99484	77	1,34390	160	2,79253
18	0,31416	38	0,66323	58	1,01229	78	1,36136	170	2,96706
19	0,33161	39	0,68068	59	1,02974	79	1,37881	180	3,14159
20	0,34907	40	0,69813	60	1,04719	80	1,39626		

TAVOLA IV.

Lunghezza degli archi di circolo data la corda c e la sassetta s :Si avrà $L = C \times A$.

Rapporto $\frac{s}{c}$	A	Rapporto $\frac{s}{c}$	A	Rapporto $\frac{s}{c}$	A	Rapporto $\frac{s}{c}$	A
0,100	1,02645	0,131	1,04515	0,161	1,06775	0,191	1,09461
0,101	1,02698	0,132	1,04584	0,162	1,06858	0,192	1,09557
0,102	1,02752	0,133	1,04652	0,163	1,06941	0,193	1,09654
0,103	1,02806	0,134	1,04722	0,164	1,07025	0,194	1,09752
0,104	1,02860	0,135	1,04792	0,165	1,07109	0,195	2,09850
0,105	1,02914	0,136	1,04862	0,166	1,07194	0,196	1,09949
0,106	1,02970	0,137	1,04932	0,167	1,07279	0,197	1,10048
0,107	1,03026	0,138	1,05003	0,168	1,07365	0,198	1,10147
0,108	1,03082	0,139	1,05075	0,169	1,07451	0,199	1,10247
0,109	1,03139	0,140	1,05147	0,170	1,07537	0,200	2,10348
0,110	1,03196	0,141	1,05220	0,171	1,07624	0,201	1,10447
0,111	1,03254	0,142	1,05293	0,172	1,07711	0,202	1,10548
0,112	1,03312	0,143	1,05367	0,173	1,07799	0,203	1,10650
0,113	1,03371	0,144	1,05441	0,174	1,07888	0,204	1,10752
0,114	1,03430	0,145	1,05516	0,175	1,07977	0,205	1,10855
0,115	1,03490	0,146	1,05591	0,176	1,08066	0,206	1,10958
0,116	1,03551	0,147	1,05667	0,177	1,08156	0,207	1,11062
0,117	1,03611	0,148	1,05743	0,178	1,08246	0,208	1,11166
0,118	1,03672	0,149	1,05819	0,179	1,08337	0,209	1,11269
0,119	1,03734	0,150	1,05896	0,180	1,08428	0,210	1,11374
0,120	1,03797	0,151	1,05973	0,181	1,08519	0,211	1,11479
0,121	1,03860	0,152	1,06051	0,182	1,08611	0,212	1,11584
0,122	1,03923	0,153	1,06130	0,183	1,08704	0,213	1,11692
0,123	1,03987	0,154	1,06209	0,184	1,08797	0,214	1,11796
0,124	1,04051	0,155	1,06288	0,185	1,08890	0,215	1,11904
0,125	1,04116	0,156	1,06368	0,186	1,08984	0,216	1,12011
0,126	1,04181	0,157	1,06449	0,187	1,09079	0,217	1,12118
0,127	1,04247	0,158	1,06530	0,188	1,09174	0,218	1,12225
0,128	1,04313	0,159	1,06611	0,189	1,09269	0,219	1,12334
0,129	1,04380	0,160	1,06693	0,190	1,09365	0,220	1,12445
0,130	1,04447						

Rapporto $\frac{s}{c}$	A	Rapporto $\frac{s}{c}$	A	Rapporto $\frac{s}{c}$	A	Rapporto $\frac{s}{c}$	A
0,221	1,12556	0,256	1,16649	0,291	1,21230	0,326	1,26286
0,222	1,12663	0,257	1,16774	0,292	0,21381	0,327	1,26437
0,223	1,12774	0,258	1,16899	0,293	1,21520	0,328	1,26588
0,224	1,12885	0,259	1,17024	0,294	1,21658	0,329	1,26740
0,225	1,12997	0,260	1,17150	0,295	1,21794	0,330	1,26892
0,226	1,13108	0,261	1,17275	0,296	1,21926	0,331	1,27044
0,227	1,13219	0,262	1,17401	0,297	1,22061	0,332	1,27196
0,228	1,13331	0,263	1,17527	0,298	1,22203	0,333	1,27349
0,229	1,13444	0,264	1,17655	0,299	1,22347	0,334	1,27502
0,230	1,13557	0,265	1,17784	0,300	1,22495	0,335	1,27656
0,231	1,13671	0,266	1,17912	0,301	1,22635	0,336	1,27810
0,232	1,13786	0,267	1,18040	0,302	1,22776	0,337	1,27964
0,233	1,13903	0,268	1,18162	0,303	1,22918	0,338	1,28118
0,234	1,14020	0,269	1,18294	0,304	1,23061	0,339	1,28273
0,235	1,14136	0,270	1,18428	0,305	1,23205	0,340	1,28428
0,236	1,14247	0,271	1,18557	0,306	1,23349	0,341	1,28580
0,237	1,14363	0,272	1,18688	0,307	1,23491	0,342	1,28739
0,238	1,14480	0,273	1,18819	0,308	1,23636	0,343	1,28895
0,239	1,14597	0,274	1,18960	0,309	1,23780	0,344	1,29052
0,240	1,14714	0,275	1,19082	0,310	1,23925	0,345	1,29200
0,241	1,14831	0,276	1,19214	0,311	1,24070	0,346	1,29366
0,242	1,14949	0,277	1,19345	0,312	1,24216	0,347	1,29523
0,243	1,15067	0,278	1,19477	0,313	1,21360	0,348	1,29681
0,244	1,15186	0,279	1,19610	0,314	1,24506	0,349	1,29839
0,245	1,15308	0,280	1,19743	0,315	1,24654	0,350	1,29997
0,246	1,15429	0,281	1,19887	0,316	1,24801	0,351	1,30156
0,247	1,15549	0,282	1,20011	0,317	1,24946	0,352	1,30315
0,248	1,15670	0,283	1,20146	0,318	1,25095	0,353	1,30474
0,249	1,15791	0,284	1,20282	0,319	1,25243	0,354	1,30634
0,250	1,15912	0,285	1,20419	0,320	1,25391	0,355	1,30794
0,251	1,16033	0,286	1,20558	0,321	1,25539	0,356	1,30954
0,252	1,16157	0,287	1,20696	0,322	1,25686	0,357	1,31115
0,253	1,16279	0,288	1,20828	0,323	1,25836	0,358	1,31276
0,254	1,16402	0,289	1,20967	0,324	1,25987	0,359	1,31437
0,255	1,16526	0,290	1,21102	0,325	1,26137	0,360	1,31599

Rapporto $\frac{s}{c}$	A	Rapporto $\frac{s}{c}$	A	Rapporto $\frac{s}{c}$	A	Rapporto $\frac{s}{c}$	A
0,361	1,31761	0,396	1,37628	0,431	1,43856	0,466	1,50416
0,362	1,31923	0,397	1,37805	0,432	1,44039	0,467	1,50608
0,363	1,32066	0,398	1,37974	0,433	1,44222	0,468	1,50800
0,364	1,32249	0,399	1,38118	0,434	1,44405	0,469	1,50992
0,365	1,32413	0,400	1,38322	0,435	1,44589	0,470	1,51185
0,366	1,32577	0,401	1,38496	0,436	1,44773	0,471	1,51378
0,367	1,32741	0,402	1,38671	0,437	1,44957	0,472	1,51571
0,368	1,32905	0,403	1,38846	0,438	1,45142	0,473	1,51764
0,369	1,33069	0,404	1,39021	0,439	1,45327	0,474	1,51958
0,370	1,33234	0,405	1,39196	0,440	1,45512	0,475	1,52152
0,371	1,33399	0,406	1,39372	0,441	1,45697	0,476	1,52346
0,372	1,33564	0,407	1,39548	0,442	1,45883	0,477	1,52541
0,373	1,33730	0,408	1,39724	0,443	1,46069	0,478	1,52736
0,374	1,33896	0,409	1,39900	0,444	1,46255	0,479	1,52931
0,375	1,34063	0,410	1,40077	0,445	1,46441	0,480	1,53126
0,376	1,34229	0,411	1,40254	0,446	1,46628	0,481	1,53322
0,377	1,34396	0,412	1,40432	0,447	1,46815	0,482	1,53518
0,378	1,34563	0,413	1,40610	0,448	1,47002	0,483	1,53714
0,379	1,34731	0,414	1,40788	0,449	1,47189	0,484	1,53910
0,380	1,34899	0,415	1,40966	0,450	1,47377	0,485	1,54106
0,381	1,35008	0,416	1,41145	0,451	1,47565	0,486	1,54302
0,382	1,35237	0,417	1,41324	0,452	1,47753	0,487	1,54499
0,383	1,35406	0,418	1,41503	0,453	1,47942	0,488	1,54696
0,384	1,35575	0,419	1,41682	0,454	1,48131	0,489	1,54893
0,385	1,35744	0,420	1,41861	0,455	1,48320	0,490	1,55090
0,386	1,35914	0,421	1,42041	0,456	1,48509	0,491	1,55288
0,387	1,36084	0,422	1,42222	0,457	1,48699	0,492	1,55486
0,388	1,36254	0,423	1,42402	0,458	1,48889	0,493	1,55685
0,389	1,36425	0,424	1,42582	0,459	1,49079	0,494	1,55884
0,390	1,36596	0,425	1,42764	0,460	1,49269	0,495	1,56083
0,391	1,36767	0,426	1,42945	0,461	1,49460	0,496	1,56282
0,392	1,36939	0,427	1,43127	0,462	1,49651	0,497	1,56481
0,393	1,37111	0,428	1,43309	0,463	1,49842	0,498	1,56680
0,394	1,37283	0,429	1,43491	0,464	1,50033	0,499	1,56879
0,395	1,37455	0,430	1,43673	0,465	1,50224	0,500	1,57079

TAVOLA V.

Velocità dovute ad una data altezza ($v = \sqrt{2gh}$)

Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
0,001	0,140	0,14	1,657	0,36	2,658	0,58	3,373	0,80	3,961
0,002	0,198	0,15	1,715	0,37	2,694	0,59	3,402	0,81	3,986
0,003	0,243	0,16	1,772	0,38	2,730	0,60	3,431	0,82	4,011
0,004	0,280	0,17	1,826	0,39	2,766	0,61	3,459	0,83	4,035
0,005	0,313	0,18	1,879	0,40	2,801	0,62	3,488	0,84	4,059
0,006	0,343	0,19	1,931	0,41	2,836	0,63	3,516	0,85	4,083
0,007	0,370	0,20	1,981	0,42	2,870	0,64	3,543	0,86	4,107
0,008	0,395	0,21	2,030	0,43	2,904	0,65	3,571	0,87	4,131
0,009	0,420	0,22	2,078	0,44	2,938	0,66	3,598	0,88	4,155
0,01	0,443	0,23	2,124	0,45	2,971	0,67	3,625	0,89	4,178
0,02	0,626	0,24	2,170	0,46	3,004	0,68	3,652	0,90	4,202
0,03	0,767	0,25	2,215	0,47	3,037	0,69	3,679	0,91	4,225
0,04	0,885	0,26	2,259	0,48	3,069	0,70	3,706	0,92	4,248
0,05	0,990	0,27	2,301	0,49	3,100	0,71	3,732	0,93	4,271
0,06	1,085	0,28	2,344	0,50	3,132	0,72	3,758	0,94	4,294
0,07	1,172	0,29	2,385	0,51	3,163	0,73	3,784	0,95	4,317
0,08	1,253	0,30	2,426	0,52	3,194	0,74	3,810	0,96	4,340
0,09	1,329	0,31	2,466	0,53	3,224	0,75	3,836	0,97	4,362
0,10	1,401	0,32	2,506	0,54	3,253	0,76	3,861	0,98	4,384
0,11	1,468	0,33	2,544	0,55	3,285	0,77	3,886	0,99	4,407
0,12	1,534	0,34	2,582	0,56	3,314	0,78	3,911	1,00	4,429
0,13	1,597	0,35	2,620	0,57	3,344	0,79	3,936	1,01	4,451

Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
1,02	4,473	1,31	5,069	1,60	5,603	1,89	6,089	2,18	6,540
1,03	4,495	1,32	5,089	1,61	5,620	1,90	6,105	2,19	6,555
1,04	4,517	1,33	5,108	1,62	5,637	1,91	6,122	2,20	6,570
1,05	4,539	1,34	5,127	1,63	5,655	1,92	6,138	2,21	6,584
1,06	4,560	1,35	5,146	1,64	5,672	1,93	6,154	2,22	6,599
1,07	4,582	1,36	5,165	1,65	5,690	1,94	6,170	2,23	6,614
1,08	4,603	1,37	5,184	1,66	5,707	1,95	6,186	2,24	6,629
1,09	4,624	1,38	5,203	1,67	5,724	1,96	6,202	2,25	6,644
1,10	4,645	1,39	5,222	1,68	5,741	1,97	6,217	2,26	6,658
1,11	4,666	1,40	5,241	1,69	5,758	1,98	6,232	2,27	6,673
1,12	4,687	1,41	5,259	1,70	5,775	1,99	6,248	2,28	6,688
1,13	4,708	1,42	5,278	1,71	5,792	2,00	6,264	2,29	6,703
1,14	4,729	1,43	5,297	1,72	5,809	2,01	6,279	2,30	6,717
1,15	4,750	1,44	5,315	1,73	5,826	2,02	6,295	2,31	6,732
1,16	4,770	1,45	5,333	1,74	5,842	2,03	6,311	2,32	6,746
1,17	4,790	1,46	5,351	1,75	5,859	2,04	6,326	2,33	6,761
1,18	4,811	1,47	5,370	1,76	5,876	2,05	6,341	2,34	6,775
1,19	4,831	1,48	5,388	1,77	5,893	2,06	6,357	2,35	6,790
1,20	4,852	1,49	5,406	1,78	5,909	2,07	6,372	2,36	6,804
1,21	4,872	1,50	5,425	1,79	5,926	2,08	6,388	2,37	6,819
1,22	4,892	1,51	5,443	1,80	5,942	2,09	6,403	2,38	6,833
1,23	4,913	1,52	5,461	1,81	5,959	2,10	6,418	2,39	6,847
1,24	4,933	1,53	5,479	1,82	5,975	2,11	6,434	2,40	6,862
1,25	4,953	1,54	5,496	1,83	5,992	2,12	6,449	2,41	6,876
1,26	4,972	1,55	5,514	1,84	6,008	2,13	6,464	2,42	6,890
1,27	4,991	1,56	5,532	1,85	6,024	2,14	6,479	2,43	6,904
1,28	5,011	1,57	5,550	1,86	6,041	2,15	6,494	2,44	6,919
1,29	5,031	1,58	5,567	1,87	6,057	2,16	6,510	2,45	6,933
1,30	5,050	1,59	5,585	1,88	6,073	2,17	6,525	2,46	6,947

Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
2,47	6,961	2,76	7,356	3,05	7,736	3,34	8,096	3,63	8,439
2,48	6,975	2,77	7,372	3,06	7,748	3,35	8,107	3,64	8,450
2,49	6,989	2,78	7,385	3,07	7,760	3,36	8,119	3,65	8,462
2,50	7,003	2,79	7,398	3,08	7,773	3,37	8,131	3,66	8,474
2,51	7,017	2,80	7,411	3,09	7,786	3,38	8,143	3,67	8,485
2,52	7,031	2,81	7,425	3,10	7,798	3,39	8,155	3,68	8,497
2,53	7,045	2,82	7,437	3,11	7,811	3,40	8,167	3,69	8,508
2,54	7,059	2,83	7,451	3,12	7,823	3,41	8,179	3,70	7,520
2,55	7,073	2,84	7,464	3,13	7,836	3,42	8,191	3,71	8,531
2,56	7,087	2,85	7,477	3,14	7,849	3,43	8,203	3,72	8,543
2,57	7,101	2,86	7,490	3,15	7,861	3,44	8,215	3,73	8,554
2,58	7,114	2,87	7,503	3,16	7,873	3,45	8,227	3,74	8,566
2,59	7,128	2,88	7,517	3,17	7,886	3,46	8,239	3,75	8,577
2,60	7,142	2,89	7,530	3,18	7,898	3,47	8,251	3,76	8,588
2,61	7,156	2,90	7,543	3,19	7,911	3,48	8,263	3,77	8,600
2,62	7,169	2,91	7,556	3,20	7,923	3,49	8,274	3,78	8,611
2,63	7,183	2,92	7,569	3,21	7,936	3,50	8,286	3,79	8,623
2,64	7,197	2,93	7,582	3,22	7,948	3,51	8,298	3,80	8,634
2,65	7,210	2,94	7,594	3,23	7,960	3,52	8,310	3,81	8,645
2,66	7,224	2,95	7,607	3,24	7,973	3,53	8,322	3,82	8,657
2,67	7,237	2,96	7,620	3,25	7,985	3,54	8,333	3,83	8,668
2,68	7,251	2,97	7,633	3,26	7,997	3,55	8,345	3,84	8,679
2,69	7,265	2,98	7,646	3,27	8,009	3,56	8,357	3,85	8,691
2,70	7,278	2,99	7,659	3,28	8,022	3,57	8,369	3,86	8,702
2,71	7,291	3,00	7,672	3,29	8,034	3,58	8,380	3,87	8,713
2,72	7,305	3,01	7,684	3,30	8,046	3,59	8,392	3,88	8,725
2,73	7,318	3,02	7,697	3,31	8,058	3,60	8,404	3,89	8,736
2,74	7,332	3,03	7,710	3,32	8,070	3,61	8,415	3,90	8,747
2,75	7,345	3,04	7,722	3,33	8,082	3,62	8,427	3,91	8,758

Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
3,92	8,769	4,21	9,088	4,50	9,396	4,79	9,694	7,00	11,718
3,93	8,780	4,22	9,099	4,51	9,406	4,80	9,704	7,25	11,926
3,94	8,792	4,23	9,109	4,52	9,417	4,81	9,714	7,50	12,130
3,95	8,803	4,24	9,120	4,53	9,427	4,82	9,724	8,00	12,330
3,96	8,814	4,25	9,131	4,54	9,437	4,83	9,734	8,25	12,528
3,97	8,825	4,26	9,142	4,55	9,448	4,84	9,744	8,50	12,722
3,98	8,836	4,27	9,152	4,56	9,458	4,85	9,754	8,75	12,913
3,99	8,847	4,28	9,163	4,57	9,468	4,86	9,764	9,00	13,102
4,00	8,858	4,29	9,174	4,58	9,479	4,87	9,774	9,25	13,288
4,01	8,869	4,30	9,185	4,59	9,489	4,88	9,784	9,50	13,471
4,02	8,880	4,31	9,195	4,60	9,500	4,89	9,794	9,75	13,652
4,03	8,892	4,32	9,206	4,61	9,510	4,90	9,804	10,00	13,830
4,04	8,903	4,33	9,217	4,62	9,520	4,91	9,814	11,00	14,006
4,05	8,914	4,34	9,227	4,63	9,530	4,92	9,821	12,00	14,690
4,06	8,925	4,35	9,238	4,64	9,541	4,93	9,834	13,00	15,343
4,07	8,936	4,36	9,248	4,65	9,551	4,94	9,844	14,00	15,970
4,08	8,946	4,37	9,259	4,66	9,561	4,95	9,854	15,00	16,572
4,09	8,957	4,38	9,270	4,67	9,572	4,96	9,864	16,00	17,154
4,10	8,968	4,39	9,280	4,68	9,582	4,97	9,874	17,00	17,717
4,11	8,979	4,40	9,291	4,69	9,592	4,98	9,884	18,00	18,257
4,12	8,990	4,41	9,301	4,70	9,602	4,99	9,894	19,00	18,781
4,13	9,001	4,42	9,312	4,71	9,612	5,00	9,904	19,00	19,306
4,14	9,012	4,43	9,322	4,72	9,623	5,25	10,149	20,00	19,808
4,15	9,023	4,44	9,333	4,73	9,633	5,50	10,387	21,00	20,297
4,16	9,034	4,45	9,343	4,74	9,643	5,75	10,621	22,00	20,775
4,17	9,045	4,46	9,354	4,75	9,653	6,00	10,849	23,00	21,242
4,18	9,055	4,47	9,364	4,76	9,663	6,25	11,073	24,00	21,698
4,19	9,066	4,48	9,375	4,77	9,673	6,50	11,292	25,00	22,146
4,20	9,077	4,49	9,385	4,78	9,684	6,75	11,507	26,00	22,584

Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente	Altezza della caduta	Velocità corrispondente
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
27,00	23,015	50	31,329	73	37,843	96	43,397	195	61,850
28,00	23,437	51	31,631	74	38,101	97	43,622	200	62,638
29,00	23,852	52	31,939	75	38,358	98	43,847	205	63,416
30,00	24,260	53	32,245	76	38,613	99	44,070	210	64,185
31,00	24,661	54	32,548	77	38,866	100	44,292	215	64,944
32	25,055	55	32,848	78	39,117	105	45,386	220	65,695
33	25,444	56	33,145	79	39,367	110	46,454	225	66,438
34	25,886	57	33,440	80	39,616	115	47,498	230	67,171
35	26,203	58	33,732	81	39,863	120	48,519	235	67,898
36	26,575	59	34,021	82	40,108	125	49,520	240	68,616
37	26,942	60	34,308	83	40,352	130	50,500	245	69,328
38	27,303	61	34,593	84	40,594	135	51,462	250	70,031
39	27,660	62	34,875	85	40,835	140	52,407	255	70,728
40	28,013	63	35,155	86	41,074	145	53,334	260	71,418
41	28,361	64	35,433	87	41,313	150	54,246	265	72,102
42	28,704	65	35,709	88	41,549	155	55,143	270	72,780
43	29,044	66	35,983	89	41,785	160	56,025	275	73,450
44	29,380	67	36,254	90	42,019	165	56,894	280	74,114
45	29,712	68	36,524	91	42,252	170	57,749	285	74,773
46	30,040	69	36,791	92	42,483	175	58,592	290	75,426
47	30,365	70	37,057	93	42,713	180	59,424	295	76,074
48	30,686	71	37,321	94	42,942	185	60,243	300	76,716
49	31,004	72	37,583	95	43,170	190	61,052		

TAVOLA VI.

Pesi specifici ossia pesi (in chilogrammi) per ogni decimetro cubo

DENOMINAZIONE del Corpo	Peso Specifico	DENOMINAZIONE del Corpo	Peso Specifico
Platino laminato	22,669	Tegole cotte	1,812
Oro fuso	19,258	Sabbia ordinaria secca . .	1,638
Argento	10,474	Terra argillosa, battuta, fresca	2,060
Argento battuto	10,511	Terra secca	1,930
Mercurio a zero	13,598	Terra di brughiera fresca	2,050
Rame battuto	9,000	Terra forte secca	1,338
Rame fuso	8,788	Muratura di mattoni e malta fresca . .	1,627
Piombo fuso	11,352	secca	1,532
Stagno	7,291	Muratura di pietrame cal- careo :	
Zinco fuso	7,037	fresca	2,460
Bismuto	9,832	secca	2,400
Ghiaccia	7,207	Muratura di grès fresca .	2,100
Ferro fucinato	7,788	secca	2,000
Acciajo cementato	7,816	Vetro da bottiglie	2,811
Acciajo fuso	7,919	Vetro da invetriate	2,642
Ottone	8,200	Vetro da cristalli	2,892
Bronzo da cannone	8,788	Vetro da specchio	2,465
Calcare compatto	2,450	Flint	3,329
Alabastro	2,611	Porcellana	2,319
Creta	2,700	Legno, fibra legnosa oso- stanza legnosa	1,500
Gesso fuso e dimoecato . .	0,970	Legnosecc. all'aria (acero)	0,645
Quarzo	2,624	Legno di pomo	0,733
Grès	2,350	Legno di betulla	0,738
Sebisto argilloso	2,670	Legno di pero	0,732
Basalto	2,662		
Granito	2,801		
Antracite	1,825		
Lignite	1,200		

DENOMINAZIONE del Corpo	Peso Specifico	DENOMINAZIONE del Corpo	Peso Specifico
Legno di faggio	0,590	Birra	1,006
Legno di bosso	0,942	Vino	0,975
Legno d'ebano verde . .	1,210	Latte	1,080
Legno d'ebano nero . . .	1,187	Olio di lino	0,940
Pino abete	0,555	Olio d'oliva	0,915
Pino abbattuto di fresco .	0,894	Olio di colza	0,914
Legno di quercia d'estate	0,690	Acido muriatico contenen-	
Legno d'ontano	0,500	te 39,675 % di cloro . .	1,200
Legno di frassino	0,670	Idem 35,310 % " . . .	1,180
Legno di faggio bianco .	0,769	Idem 29,757 % " . . .	1,152
Legno di pino silvestre . .	0,550	Idem 23,855 % " . . .	1,120
Legno di pino fresco . . .	0,912	Idem 17,854 % " . . .	1,090
Sughero	0,240	Acido nitrico contenente	
Legno di larice	0,563	dell'acido auidro libe-	
Legno di tiglio	0,499	ro, 97,7 %	1,500
Legno d'acajou	0,754	73,3 %	1,479
Legno di noce	0,660	59,8 %	1,419
Legno di pioppo	0,387	45,4 %	1,332
Legno di guajaco	1,263	30,3 %	1,221
Legno d'abete rosso . . .	0,472	26,3 %	1,190
Legno di salice	0,529	Acidosolforico concentrato	1,850
Zucchero bianco	1,606	Alcool rettificato di 35° .	0,969
Orzo	1,278	" " 10°	0,965
Frumento	1,346	Acqua di mare	1,027
Ghiaccio	0,916	Acqua a 4°	1,000

TAVOLA VII.

Potenze, radici e numeri reciproci.

n	$\frac{1}{n}$	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$
0,30	3,333	0,090	0,027	0,549	1,825	0,669	1,495
0,375	2,667	0,141	0,063	0,612	1,634	0,721	1,387
0,60	1,667	0,360	0,216	0,775	1,291	0,843	1,186
0,625	1,600	0,391	0,244	0,791	1,265	0,855	1,170
0,70	1,429	0,490	0,343	0,837	1,196	0,888	1,126
0,75	1,333	0,563	0,422	0,866	1,155	0,909	1,100
0,875	1,143	0,766	0,670	0,935	1,070	0,956	1,047
0,90	1,111	0,810	0,729	0,949	1,054	0,965	1,036
1,10	0,909	1,210	1,331	1,049	0,953	1,032	0,969
1,2	0,833	1,440	1,728	1,095	0,913	1,063	0,941
1,25	0,800	1,563	1,953	1,118	0,894	1,077	0,928
1,50	0,667	2,250	3,375	1,225	0,816	1,145	0,874
1,75	0,571	3,063	5,273	1,323	0,756	1,205	0,830
2,0	0,500	4,0	8,0	1,414	0,707	1,260	0,794
2,25	0,444	5,063	11,391	1,500	0,667	1,310	0,763
2,50	0,400	6,250	15,625	1,581	0,632	1,357	0,737
2,75	0,364	7,563	20,797	1,658	0,603	1,401	0,714
3,0	0,333	9,0	27,0	1,732	0,577	1,442	0,693
3,25	0,308	10,563	34,328	1,803	0,555	1,481	0,675
3,50	0,286	12,250	42,875	1,871	0,535	1,518	0,659
3,75	0,267	14,063	52,734	1,936	0,516	1,554	0,644
4,0	0,250	16,0	64,0	2,0	0,500	1,587	0,630
4,5	0,222	20,250	91,125	2,121	0,471	1,651	0,604
5,0	0,200	25,0	125,0	2,236	0,447	1,710	0,585
5,5	0,182	30,250	166,375	2,345	0,426	1,754	0,567
6,0	0,167	36,0	216,0	2,450	0,408	1,817	0,551
6,5	0,154	42,25	274,625	2,550	0,392	1,866	0,536
7,0	0,143	49,0	343,0	2,646	0,378	1,913	0,523
7,5	0,133	56,250	421,875	2,739	0,365	1,957	0,510
8,0	0,125	64,0	512,0	2,828	0,354	2,0	0,500

n	$\frac{1}{n}$	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$
8,5	0,118	72,250	614,125	2,915	0,343	2,041	0,490
9,0	0,111	81,0	729,0	3,000	0,333	2,080	0,481
9,5	0,105	90,250	857,375	3,082	0,324	2,118	0,472
10	0,100	100,0	1000,0	3,162	0,317	2,154	0,464
11	0,091	121,0	1331,0	3,317	0,302	2,224	0,456
12	0,083	144	1728	3,464	0,289	2,289	0,436
13	0,077	169	2197	3,606	0,277	2,351	0,425
14	0,071	196	2744	3,742	0,267	2,410	0,415
15	0,067	225	3375	3,873	0,258	2,466	0,405
16	0,063	256	4096	4,000	0,250	2,520	0,397
17	0,059	289	4913	4,123	0,243	2,571	0,389
18	0,056	324	5832	4,243	0,236	2,621	0,381
19	0,053	361	6859	4,359	0,229	2,668	0,375
20	0,050	400	8000	4,472	0,224	2,714	0,368
50	0,020	2500	125000	7,071	0,141	3,684	0,271
100	0,010	10000	1000000	10,0	0,10	4,642	0,215
1000	0,001	1000000	1000000000	31,623	0,032	10,0	0,100
$\pi = 3,142$	0,318	9,870	31,006	1,772	0,564	1,465	0,683
$2\pi = 6,283$	0,159	39,478	248,050	2,507	0,409	1,845	0,542
$\frac{\pi}{2} = 1,571$	0,637	2,467	3,878	1,253	0,798	1,162	0,860
$\frac{\pi}{3} = 1,047$	0,955	1,097	1,148	1,023	0,977	1,015	0,985
$\frac{1}{3}\pi = 4,189$	0,239	17,546	73,496	2,047	0,501	1,612	0,620
$\frac{\pi}{4} = 0,785$	1,274	0,617	0,484	0,886	1,128	0,923	1,084
$\frac{\pi}{5} = 0,524$	1,910	0,274	0,144	0,724	1,382	0,806	1,241
$\pi^2 = 9,870$	0,101	97,409	961,390	3,142	0,318	2,145	0,466
$\pi^3 = 31,006$	0,032	961,390	29809,910	5,568	1,796	3,142	0,318
$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 0,098$	10,186	0,0096	0,001	0,313	3,192	0,161	2,168
$\frac{3\pi}{16} = 0,589$	1,698	0,347	0,204	0,768	1,303	0,838	1,193
$g = 9,808$	0,102	96,197	943,610	3,132	0,319	2,141	0,467
$2g = 19,616$	0,051	484,888	7 547,996	4,429	0,226	2,697	0,371

TAVOLA VIII.

Radici quadrate e cubiche.

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
0,01	0,10000	0,21544	0,26	0,50990	0,63825
0,02	0,14132	0,27144	0,27	0,51962	0,64638
0,03	0,17321	0,31072	0,28	0,52915	0,65421
0,04	0,20000	0,34200	0,29	0,53852	0,66191
0,05	0,22361	0,36840	0,30	0,54772	0,66943
0,06	0,24495	0,39149	0,31	0,55678	0,67679
0,07	0,26458	0,41213	0,32	0,56569	0,68399
0,08	0,28284	0,43089	0,33	0,57446	0,69104
0,09	0,30000	0,44814	0,34	0,58310	0,69795
0,10	0,31623	0,46416	0,35	0,59161	0,70473
0,11	0,33166	0,47914	0,36	0,60000	0,71138
0,12	0,34641	0,49324	0,37	0,60828	0,71791
0,13	0,36056	0,50658	0,38	0,61644	0,72432
0,14	0,37417	0,51925	0,39	0,62450	0,73061
0,15	0,38730	0,53133	0,40	0,63246	0,73681
0,16	0,40000	0,54288	0,41	0,64031	0,74290
0,17	0,41231	0,55397	0,42	0,64807	0,74889
0,18	0,42426	0,56462	0,43	0,65574	0,75478
0,19	0,43589	0,57489	0,44	0,66332	0,76059
0,20	0,44721	0,58480	0,45	0,67082	0,76631
0,21	0,45826	0,59439	0,46	0,67823	0,77194
0,22	0,46904	0,60368	0,47	0,68557	0,77750
0,23	0,47958	0,61269	0,48	0,69282	0,78297
0,24	0,48990	0,62145	0,49	0,70000	0,78837
0,25	0,50000	0,62996	0,50	0,70711	0,79370
$\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2};$			$\cos 30^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,8660.$		
$\operatorname{sen} 75^\circ = \cos 15^\circ = 0,9659;$			$\operatorname{tang} 30^\circ = \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,5773;$		
$\cos 75^\circ = \operatorname{sen} 15^\circ = 0,2588;$			$\operatorname{cotg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = 1,7321.$		

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
0,51	0,71414	0,79896	0,76	0,87178	0,91258
0,52	0,72111	0,80415	0,77	0,87750	0,91657
0,53	0,72801	0,80927	0,78	0,88318	0,92052
0,54	0,73485	0,81433	0,79	0,88882	0,92443
0,55	0,74162	0,81932	0,80	0,89443	0,92832
0,56	0,74833	0,82426	0,81	0,90000	0,93217
0,57	0,75498	0,82913	0,82	0,90554	0,93599
0,58	0,76158	0,83396	0,83	0,91104	0,93978
0,59	0,76811	0,83872	0,84	0,91652	0,94354
0,60	0,77460	0,84343	0,85	0,92195	0,94727
0,61	0,78102	0,84809	0,86	0,92736	0,95097
0,62	0,78740	0,85270	0,87	0,93274	0,95464
0,63	0,79373	0,85726	0,88	0,93808	0,95828
0,64	0,80000	0,86177	0,89	0,94340	0,96190
0,65	0,80623	0,86624	0,90	0,94868	0,96549
0,66	0,81240	0,87066	0,91	0,95394	0,96905
0,67	0,81854	0,87503	0,92	0,95917	0,97259
0,68	0,82462	0,87937	0,93	0,96437	0,97610
0,69	0,83066	0,88366	0,94	0,96954	0,97959
0,70	0,83666	0,88790	0,95	0,97468	0,98305
0,71	0,84261	0,89211	0,96	0,97980	0,98648
0,72	0,84853	0,89628	0,97	0,98489	0,98990
0,73	0,85440	0,90041	0,98	0,98995	0,99329
0,74	0,86023	0,90450	0,99	0,99499	0,99666
0,75	0,86603	0,90856	1,00	1,00000	1,00000

AGGIUNTE ED OSSERVAZIONI.

Ritenendo di molta importanza, specialmente per coloro che si occupano di costruzioni, lo studio pratico sulle macchine da elevare pesi, al quale si è consacrato l'ultimo capitolo di questo Manuale, crediamo che non saranno privi d'interesse i dati seguenti che noi riportiamo dal *Ball-Experimental Mechanic* e che risultarono da esperienze fatte dallo stesso autore citato:

1.° Carrucola mobile semplice.

La carrucola sottoposta all'esperienza era in ghisa del diametro di millimetri 82; gola di millimetri 15 di larghezza con perni in ferro di millimetri 15 di diametro. Carrucola fissa di ghisa di millimetri 127 con scanalatura larga millimetri 10 e perno come sopra. Corda del diametro di millimetri 6. Rapporto di velocità = 2.

Carico Q portato dalla carrucola		Sforzo P motore osservato nell'esperienza	
Libbre inglesi	Chilogrammi	Libbre inglesi	Chilogrammi
28	12,70	17,5	7,94
57	25,80	33,5	15,20
85	38,60	48,5	22,00
113	51,20	64,0	29,00
142	64,50	80,0	36,30
170	77,00	94,5	42,90
198	89,80	110,5	50,10
226	102,60	125,5	57,00

In base a queste esperienze risulterebbe il rendimento eguale al 90 per 100 e l'autore desumerebbe la formola pratica

$P = 2,21 + 0,5453 Q$, oppure esprimendo P e Q in chilogr. $P = 1,0 + 0,5453 Q$.

2.° Taglia a tre carrucole mobili.

La taglia era in ghisa di millimetri 63 di diametro con corda di millimetri 6.
Rapporto di velocità = 6.

Carico Q		Sforzo motore P	
Libbre inglesi	Chilogrammi	Libbre inglesi	Chilogrammi
57	25, 8	15, 5	57, 0
114	51, 7	29, 5	13, 4
171	77, 5	43, 5	19, 7
228	103, 5	56	25, 4
281	127, 5	70	31, 8
338	153, 0	83	37, 6
395	179, 0	97	44, 0
452	205, 0	109	49, 5

Da questi risultati si deduce il rendimento utile del 67 per 100 e la formula pratica

$$P = 2,36 + 0,238 Q \text{ in libbre inglesi, o } P = 1,07 + 0,238 Q \text{ in chilogr.}$$

3.° Carrucola differenziale.

Circonferenza della gola maggiore millimetri 301; della minore millimetri 262. Rapporto di velocità = 16.

Carico Q		Sforzo motore P	
Libbre inglesi	Chilogrammi	Libbre inglesi	Chilogrammi
56	25, 4	10	4, 5
112	50, 8	20	9, 0
168	76, 2	31	14, 1
224	101, 6	38	17, 2
280	127, 0	48	21, 8
336	152, 5	54	24, 4
392	177, 6	64	29, 0
448	203, 0	72	32, 6
504	228, 0	80	36, 2
560	254, 0	86	39, 0

Il rendimento sarebbe in media del 38 per 100 e la formola pratica
 $P = 3,87 + 0,1508 Q$ in libbre inglesi, e $P = 1,755 + 0,1508 Q$ in chilogrammi.

4.° Carrucola di Eade.

Rapporto di velocità = 12,5. = Dimensioni proprie per sollevare circa chilogrammi 226 (500 libbre inglesi).

Carico Q		Sforzo motore P	
Libbre inglesi	Chilogrammi	Libbre inglesi	Chilogrammi
56	25,4	15	6,8
112	50,8	27	12,2
168	76,2	40	18,1
224	101,5	47	21,3
280	127,0	56	25,4
336	152,5	66	29,9
392	177,6	78	35,4
448	203,0	88	39,9
504	228,0	100	45,3
560	254,0	110	49,9

Il rendimento utile sarebbe del 40 per 100 e la formola pratica

$$P = 5,08 + 0,185 Q \text{ libbre, o } P = 2,3 + 0,185 Q \text{ chilogrammi.}$$

5.° Vite.

Una vite in ferro a filetto quadrangolare del diametro di millimetri 32 col passo di millimetri 8,4 (tre spire per pollice); il braccio motore aveva millimetri 26 di lunghezza. La madrevite era di ferro fuso ed il tutto era opportunamente spalmato di olio. = Rapporto di velocità 193.

Carico Q		Sforzo motore P	
Libbre inglesi	Chilogrammi	Libbre inglesi	Chilogrammi
28	12,7	0,4	0,18
56	25,4	0,8	0,36
84	38,0	1,2	0,54
112	50,8	1,6	0,72
140	63,5	2,0	0,91
168	76,0	2,4	1,09
196	88,8	2,7	1,22
224	101,6	3,3	1,50

Rendimento utile = 36 %. Formola che ne consegue

$$P = 0,0143 Q.$$

6.° Ruota e tamburro = (Verricello)

Ruota di legno di m. 12,24 di circonferenza; tamburro di ghisa di m. 1 0.378 di circonferenza con perni di millimetri 19 di diametro; cuscinetti in bronzo, olio, ecc. Rapporto di velocità 5,94.

Carico Q		Sforzo motore P	
Libbre inglesi	Chilogrammi	Libbre inglesi	Chilogrammi
14	6,3	2,7	1,2
28	12,7	5,3	2,4
42	19,0	7,7	3,5
56	25,4	10,1	4,6
70	31,7	12,4	5,6
84	38,0	14,7	6,7
98	44,3	17,1	7,7
112	50,8	19,4	8,8

Effetto utile 93 %: formola pratica

$$P = 0,5 + 0,169 Q \text{ libbre, ovvero } P = 0,226 + 0,169 Q \text{ chilogrammi.}$$

7.° Grua con ingranaggio semplice.

La circonferenza descritta dalla manovella era di m.¹ 1,09; il rapporto degli ingranaggi di 25 a 200 (ruota di 200 denti, pignone di 25). La circonferenza del tamburro era di millimetri 378: rapporto di velocità 23.

Carico <i>Q</i>		Sforzo motore <i>P</i>	
Libbre inglesi	Chilogrammi	Libbre inglesi	Chilogrammi
14	6,3	0,9	0,41
28	12,7	1,6	0,72
42	19,0	2,4	1,09
56	25,4	3,1	1,41
70	31,7	3,8	1,72
84	38,0	4,5	2,04
98	44,3	5,3	2,40
112	50,8	6,8	2,80

Ne deriva il rendimento utile del 78 % e la formola

$$P = 0,0556 Q.$$

8.° Grua con doppio ingranaggio.

Circonferenza descritta dalla manovella m.¹ 1,09; rapporto degli ingranaggi 30: 180 × 25: 200.

Circonferenza del tamburro millimetri 378: rapporto di velocità 137.

Carico <i>Q</i>		Sforzo motore <i>P</i>	
Libbre inglesi	Chilogrammi	Libbre inglesi	Chilogrammi
14	6,3	0,3	0,14
28	12,7	0,4	0,18
42	19,0	0,5	0,23
56	25,4	0,6	0,27
70	31,7	0,75	0,34
84	38,0	0,85	0,39
98	44,3	0,95	0,43
112	50,8	1,05	0,47

Ne deriva l'effetto utile del 63 % e la formola

$$P = 0,185 + 0,00782 Q \text{ libbre}$$

ovvero

$$P = 0,084 + 0,00782 Q \text{ chilogrammi.}$$

Noi lasciamo ai lettori la cura di confrontare questi risultati e queste formole speciali con quelle insegnate nel testo, colle quali si troverà in complesso un accordo sufficiente.

FINV.

INDICE ANALITICO DELLE MATERIE

AL LETTORE	Pag. 3
INTRODUZIONE	" 6

CAPITOLO PRIMO.

La macchina di Atwood. Essai fatti. Prime conseguenze.

Movimento dei pesi nella macchina d'Atwood. — Moto uniformemente accelerato. — Relazione fra l'aumento di velocità, per unità di tempo dei pesi, il peso addizionale e il peso totale in moto. . . Pag. 15

CAPITOLO SECONDO.

Velocità. Altre considerazioni e conseguenze che ne derivano.

Moto uniformemente ritardato o moto uniforme.

Definizione matematica della velocità. — Moto uniformemente ritardato e moto uniforme nei pesi della macchina d'Atwood. — Relazione fra la diminuzione di velocità per unità di tempo, l'ammontare della resistenza locale e il peso totale in moto. — Movimento di una macchina a seconda che l'azione motrice della medesima supera l'azione delle resistenze, oppure le eguaglia o ne è inferiore. Pag. 19

CAPITOLO TERZO.

Pressione e forza motrice. Determinazioni numeriche.

Definizione della pressione o sforzo locale. — Forza motrice e sua relazione collo sforzo locale. — Misura dello sforzo locale e della forza motrice. — Unità adottate. — Determinazione numerica e relazioni fra la pressione (o peso addizionale nella macchina d'Atwood), il peso in moto e l'accelerazione di velocità per minuto secondo. — Definizione della massa. Pag. 25

CAPITOLO QUARTO.

Le leggi del movimento. Potenza viva.

Equazioni che esprimono le relazioni fra la velocità, lo spazio percorso, ed il tempo impiegato nel moto uniforme. — Equazioni del moto uniformemente ritardato. — Esempi ed esperienze colla macchina d'Atwood. — Definizione della potenza viva e sua relazione colla velocità e colla massa in moto. — Principio delle forze vive. — Impulsione della forza e quantità di movimento. Pag. 34

CAPITOLO QUINTO.

Espressione grafica dei movimenti. Applicazioni.

Rappresentazione grafica del moto uniforme. — Risoluzione di alcuni quesiti relativi all'incontro di due corpi. — Rappresentazione grafica del moto uniformemente accelerato e del moto uniformemente ritardato. Pag. 50

CAPITOLO SESTO.

Azione simultanea di più forze o movimenti sopra lo stesso corpo.

Movimento risultante in un punto sul quale agiscano varie forze. — Forza risultante, velocità risultante. — Risoluzione del problema

inverso. — Poligono delle forze. — Equilibrio. — Forze applicate a varj punti di un corpo. — Ipotesi della perfetta rigidità dei corpi e sue conseguenze. — Determinazione dello sforzo risultante da due sforzi dati in due punti di un corpo. — Poligono funicolare o articolato. — Applicazione del medesimo alla risoluzione dei varj problemi sulla composizione e decomposizione degli sforzi applicati ai varj punti di un corpo. — Sforzi interni nei lati del poligono funicolare. — Condizione grafica di equilibrio di un sistema di sforzi applicati ai varj punti di un corpo. — Sforzo risultante in un poligono funicolare. — Sforzi paralleli. — Risultante di più sforzi paralleli. — Pressioni esercitate in due punti dati da un sistema di sforzi paralleli. — Costruzioni grafiche speciali per la composizione e decomposizione di due sforzi paralleli. — Sforzi paralleli e volti in senso opposto. — Coppia. — Centro delle forze parallele. — Centro di gravità. — Determinazione del medesimo praticamente e geometricamente. — Posizione del centro di gravità in alcuni corpi e figure semplici. — Applicazione del poligono funicolare alla ricerca dei centri di gravità Pag. 59

CAPITOLO SETTIMO.

Movimenti curvilinei. Moto circolare. Momenti delle forze.

Condizione perchè il moto risultante in un punto da più azioni contemporanee sia rettilineo. — Esempj di moti curvilinei. — Osservazioni sul moto circolare. — Relazioni fra gli sforzi locali nei varj punti, le distanze di questi punti dall'asse di rotazione ed i lavori corrispondenti. — Definizione del momento di una forza. — Principio dei momenti. — Momenti nelle forze parallele. — Momenti di posizione. — Momento di una coppia. — Determinazione dei momenti mediante il poligono funicolare. — Curva dei momenti per un corpo caricato da un peso uniforme ed appoggiato ai due estremi: discussione della medesima Pag. 81

CAPITOLO OTTAVO.

Velocità angolare. Momento d'inerzia. Forza centrifuga.

Modo di esprimere la velocità di un corpo in rotazione — numero dei giri per minuto; velocità angolare — esercizi sul modo di tro-

vare la velocità assoluta di un punto, data la velocità angolare o il numero dei giri e viceversa. — Potenza viva di un corpo in rotazione — modo di calcolarla — momento d'inerzia — raggio di girazione. — Tavola dimostrante i valori dei raggi di girazione per alcuni corpi. — Esempj di applicazioni numeriche. — Definizione ed origine della forza centrifuga o centripeta — sua determinazione — suoi effetti dannosi nelle macchine — applicazioni utili della medesima Pag. 93

CAPITOLO NONO.

Applicazioni della meccanica alla stabilità delle costruzioni (sistemi grafici).

Metodo dei poligoni articolati. — Applicazione del medesimo a varj tipi di travi armate, di armature per tetti. — Applicazione numerica ad un'armatura in ferro di 20 metri di portata, sistema Polonceau, e confronto dei risultati ottenuti con quelli derivati dalle formole comunemente usate. — Altra applicazione ad un ponte a reticolato in ferro e ghisa costruito per la ferrovia di Pensilvania (America del Nord). — Calcolo delle dimensioni dei varj pezzi componenti il medesimo. — Applicazione della curva dei momenti allo stesso esempio e confronto dei risultati. — Determinazione grafica delle pressioni sopportate dai perni di un albero caricato normalmente al suo asse, — obliquamente, — parallelamente. — Applicazioni alle grue Pag. 106

CAPITOLO DECIMO.

Resistenze passive. Urto e suoi effetti. Calcolo dell' effetto utile di una macchina.

Definizione delle resistenze passive. — Attrito — sua origine — esame del medesimo — sua relazione colla pressione e colla velocità. — Sostanze spalmanti — coefficiente d'attrito — modo di determinarlo — attrito volvente. — Tabella dei coefficienti d'attrito. — Modo di calcolare la forza motrice consumata dall'attrito sopra un perno

orizzontale; sopra un perno verticale; sopra un collare piano — formole pratiche relative. — Attrito nei denti in un ingranaggio esterno ed in un ingranaggio interno. — Lavoro dell'attrito nei perni delle puleggle della macchina d'Atwood. — Rigidezza delle funi — formole pratiche per calcolarne la resistenza locale. — Attrito fra gli anelli di una catena e fra i medesimi e i denti di ferma. — Resistenza dei mezzi — discussione della medesima — formole pratiche per calcolare la forza motrice assorbita dalla medesima. — Urto — definizione dell'urto — esame del medesimo nelle varie sue fasi — velocità comune dei due corpi al termine dell'urto (azione esterna) — costruzione grafica relativa — deformazioni che avvengono nei due corpi — perdita di potenza viva e quindi di forza motrice che ne deriva quando i corpi sono rigidi — velocità finali dopo l'urto nei corpi perfettamente elastici. — Calcolazione pratica dell'effetto utile delle macchine. — Freno di Prony e modo di servirsene Pag. 136

CAPITOLO UNDECIMO.

Applicazione delle teorie e delle costruzioni grafiche dimostrate al calcolo delle macchine in equilibrio.

Definizione di una macchina — macchine e istrumenti — forze che agiscono sopra una macchina — stato di equilibrio — velocità di regime — equazione di equilibrio. — Idea generale delle macchine per sollevar pesi. — *Leve*: equazione di equilibrio. — Costruzioni grafiche. — *Combinazioni di leve*: formola e costruzione grafica. — *Carrucole*, fissa e mobile: formole. — *Composizione di carrucole*: taglia — formole — dimensioni — rendimento utile. — *Carrucole differenziali, epicycloidali, ecc.* — Carrucola differenziale semplice — equazione di equilibrio — rapporto fra il lavoro utile e il motore. — Carrucola epicycloidale di Weston — formola — rendimento utile. — Carrucola di Heade e Moore a semplice ingranaggio — formola relativa. — Carrucola di Eade — esame della medesima — equazione di equilibrio — rendimento pratico. — *Verricelli*: varie specie di verricelli, burbera, argano, verricello differenziale — formole e costruzioni grafiche relative a ciaschedun tipo — rendimento utile — *Verricello ad ingranaggi*: formola e costruzione grafica. —

Verricello mosso direttamente dal vapore — costruzione grafica per trovare direttamente la forza in cavalli della medesima. — *Vite*: esame della medesima — formole — costruzione grafica. Pag. 169

Tabella riassuntiva delle principali definizioni e formole . .	221
Id. Lavori dei motori animati	225
Id. Lunghezza degli archi di circolo di raggio 1	227
Id. Lunghezza degli archi di circolo data la corda e la sassetta .	228
Id. Velocità dovute a date altezze di caduta	231
Id. Pesì specifici di varj corpi	236
Id. Potenza, radici, numeri reciproci	238
Id. Radici quadrate e cubiche	240
Aggiunte ed Osservazioni	242

075686861

